

Взаимодействие агентов: теория игр

Задача 1.

(«Сибиряда. Шаг в мечту». Бердск, 2011)

В племени Мумба-Юмба N человек ($N \geq 1$), каждый из которых ходит на охоту в лес. i -й соплеменник каждый день тратит на охоту долю c_i своего времени ($0 \leq c_i \leq 1$) и приносит y_i условных единиц добычи, при этом его производственная функция задается формулой $y_i = \sqrt{c_i}$. Каждый вечер, после возвращения охотников из леса, все соплеменники собираются вокруг костра и съедают всю принесенную за день добычу (каждый — свою), танцуя ритуальные танцы. Исследование, проведенное антропологами, показало, что i -й член племени оценивает свое удовольствие от прожитого дня в u_i единиц удовольствия, причем $u_i = x_i - c_i + \mathcal{R}$, где x_i — количество съеденной добычи, а $\mathcal{R}$ — удовольствие от ритуальных танцев, которое всегда одинаковое и ни от чего не зависит. Каждый член племени стремится получить как можно больше удовольствия.

а) Сколько добычи будет каждый соплеменник приносить из леса в день, сколько времени будет тратить на охоту и какое удовольствие получать?

б) Выступая с новогодним обращением, вождь племени заявил, что отныне вся принесенная добыча будет складываться в одну кучу и затем делиться между всеми соплеменниками поровну. Изменится ли поведение членов племени в этих условиях? Ответьте на вопросы пункта а) и объясните получившиеся результаты.

Задача 2.

(Всероссийская олимпиада, 2011)

Пингвины живут стаями; основное место их обитания — суша, но питаются они рыбой, за которой им время от времени приходится нырять в море. К несчастью для них, в море есть не только рыба, которой они питаются, но и косатки¹, которые питаются как рыбой, так и пингвинами. Косатки в поисках рыбы покрупнее далеко отплывают от берега, так что во многих случаях пингвинам удастся поохотиться, не сталкиваясь с косатками; но так бывает не всегда. Ученые, исследующие пингвинов, не раз наблюдали такую картину: голодные пингвины сначала довольно долго толпятся на краю утеса, потом один из них наконец прыгает в воду, а когда он выныривает, то почти разом спрыгивают все остальные.

а) Объясните такое поведение пингвинов, предполагая, что каждый пингвин ведет себя рационально (анализирует всю доступную ему информацию и принимает решения, которые позволяют ему добиться максимально благоприятного для себя исхода).

б) Покажите, что описанная ситуация не является эффективной по Парето, то есть физически возможны такие альтернативные действия пингвинов, при которых всем пингвинам было бы не хуже, чем при действиях, описанных в условии, и хотя бы одному пингвину было бы лучше.

в) Объясните, как данный сюжет иллюстрирует проблему предоставления общественных благ.

Задача 3.

(Заочный конкурс РЭШ, 2011)

а) Для каждого из следующих примеров объясните его механизм:

1) Если все подумают, что цены скоро вырастут, то цены и правда вырастут.

2) Если все подумают, что банк неплатёжеспособный, то он в действительности станет неплатёжеспособным.

¹Косатка — крупное хищное морское млекопитающее семейства дельфиновых, внешним видом напоминающее кита.

- 3) Если все фирмы в стране посчитают, что реализовывать их инвестиционные проекты невыгодно, то действительно для каждого из этих проектов упадёт доходность, которую фирма получила бы в случае его реализации.
 - 4) Если все станут считать, что выпускники вуза А зарабатывают в среднем больше, чем выпускники вуза Б, то через несколько лет, скорее всего, это станет правдой, даже если изначально вузы не отличались по уровню средних зарплат своих выпускников.
 - 5) Если все сотрудники компании считают, что сотрудник Х в будущем обязательно станет генеральным директором, то это повысит его шансы стать генеральным директором.
- б) Какая общая идея объединяет все эти примеры?
в) Приведите другой пример на эту же идею.

Задача 4.**(Заочный конкурс РЭШ, 2012)**

Иногда люди (фирмы, правительства) предпринимают затратные действия, не несущие им прямой выгоды. Так, испанский конкистадор Эрнан Кортес сжег свои корабли при высадке в Мексике; многие государства подписали Киотский протокол, взяв на себя обязательства ограничить уровень выбросов в атмосферу вредных побочных продуктов промышленного производства; люди покупают дорогие абонементы в фитнес-центры, зная, что заведомо не смогут часто туда ходить. Что объединяет все эти действия? Зачем люди могут так поступать?

Задача 5. Преподаватель собирается поставить оценку «10» (по 10-балльной шкале) студентам, получившим наилучшие результаты контрольной работы, а остальным студентам поставить оценки по пропорциональной шкале. Перед контрольной работой все студенты встретились и договорились ставить ответы «Да» на все вопросы теста, чтобы получить одинаковые результаты. Обсудите, какие из следующих условий способствуют поддержанию устойчивости сговора, а какие — не способствуют.

- а) После проверки работ все оценки публикуются в открытом доступе
- б) Все студенты живут на одном этаже в общежитии.
- в) Студенты, хорошо знающие предмет, обладают значительной физической силой.
- г) Студенты, плохо знающие предмет, обладают значительной физической силой.
- д) Некоторые студенты нелюдимы и ни с кем не дружат.
- е) Студентов очень много.

Задача 6.**(S. Landsburg. Price Theory and Applications)**

Приведите, если это возможно, примеры игр, в которых

- а) нет ни одного равновесия по Нэшу;
- б) есть ровно одно равновесие по Нэшу, но оно неоптимально по Парето;
- в) есть более одного равновесия по Нэшу, и ни одно из них не оптимально по Парето;
- г) есть более одного равновесия по Нэшу, и все они оптимальны по Парето;
- д) есть более одного равновесия по Нэшу, и лишь некоторые из них оптимальны по Парето.

Дополнительные задачи

Задача 7. На рынке зубных паст есть только два производителя: «Аквamed» и «Бленд-а-фреш». Функция спроса на продукт фирмы «Аквamed» задана уравнением $Q_A = 64 - 4P_A + 2P_B$, для «Бленд-а-фреш» — $Q_B = 50 - P_B + P_A$. Кроме того, известно, что предельные издержки производства «Аквamed» равны 5, а «Бленд-а-фреш» — 4.

а) Дайте интуитивное объяснение данным видам зависимости объема выпуска каждой фирмы от ее собственной цены и от цены конкурента.

б) Найдите равновесие, если обе компании одновременно устанавливают цены на зубную пасту.

в) Найдите равновесие, если сначала «Аквamed» устанавливает цену на свой напиток, а затем «Бленд-а-фреш», зная, какую цену установит «Аквamed», объявляет цену своего продукта. Какой из вариантов конкуренции будет предпочтительнее для каждой компании?

Задача 8.

(Заочный конкурс РЭШ, 2011)

Каждый из 150 тыс. жителей города N-ска каждое утро решает, добираться ли ему на работу на метро или на автомобиле. На метро можно гарантированно добраться до работы за 60 минут, независимо от количества пассажиров. Время в пути на автомобиле, однако, тем больше, чем больше людей выбрали этот вид транспорта. Если n тысяч человек решили поехать на автомобиле, то каждый из них затратит на дорогу $10 + 0,5n$ минут.

Для простоты будем считать, что время в пути — единственное, что учитывает житель при выборе способа передвижения.

а) Сколько человек должны выехать на дорогу, чтобы суммарное время всех горожан на то, чтобы добраться до работы, было минимально? Назовем это количество водителей общественно оптимальным.

б) Предположим, каждый человек точно оценивает количество водителей, выехавших на дорогу до него, и, независимо от других, решает, каким видом транспорта ему воспользоваться. Сколько человек поедут на автомобиле при таком независимом принятии решений? Будет ли это количество водителей общественно оптимальным?

в) Каждый житель города оценивает 1 минуту своего времени в 10 руб. Какую плату за въезд на дороги нужно ввести государству, чтобы в ситуации, описанной в пункте б), количество водителей было общественно оптимальным?

Задача 9. В темно-синем лесу, где трепещут осины, есть аллея длины 100. Из каждой точки аллеи растет дерево, под каждым деревом сидит заяц, каждый заяц хочет съесть одну морковку. Морковки продаются только в двух магазинах, которые тоже расположены на этой аллее (первый продает морковку по цене p_A и находится на расстоянии 40 от начала аллеи, второй продает морковку по цене p_B и находится на расстоянии 34 от конца аллеи). По аллее бродит Серый Волк, поэтому зайцы боятся самостоятельно добираться до магазинов. Безопасную доставку зайцев до магазина и обратно осуществляет Дед Мазай, который взимает с каждого доставленного зайца 1 рубль за каждую единицу расстояния от дерева, под которым сидит заяц, до магазина (он берет деньги только за доставку в одну сторону, а обратно отвозит бесплатно). Каждый заяц едет в тот магазин, где его затраты на покупку (стоимость морковки плюс транспортные расходы) меньше.

Продавцы морковок выкапывают свой товар из земли, поэтому предельные издержки производства одной морковки равны 0.

а) Пусть магазины одновременно и независимо выбирают p_A и p_B , максимизируя прибыль. Найдите их равновесные значения и прибыль каждого магазина.

б) Пусть магазины могут выбирать не только цены, но и свое местоположение на аллее и делают это одновременно с выбором цен. Докажите, что в этом случае равновесия не существует.

в) Второй магазин нанял Красную Шапочку, которая обезопасила от Серого Волка ту половину аллеи, на которой находится второй магазин, то есть теперь перемещение по этой половине для зайцев безопасно и бесплатно. Найдите равновесие в случае, когда магазины одновременно выбирают цены.

Задача 10. Биолог помещает двух свиней (Васю и Машу) в длинную клетку, у одной стены которой есть рычаг, при нажатии которого из отверстия, находящегося на противоположной стене, выпадает еда. Свин Вася быстрее может добежать от одного конца клетки до другого, чем свинья Маша, но при условии одновременного старта от рычага всё же не успеет до прибытия Маши съесть всю еду. Эксперименты показывают, что свиньи ведут себя следующим образом: Вася нажимает на рычаг и бежит за едой, а Маша ждет еду у отверстия. Постройте теоретико-игровую модель, учитывающую эти условия, в которой свиньи будут действовать рационально и равновесие в которой будет именно таким.

Задача 11. Две фармацевтические компании производят лекарства от одной и той же болезни. Каждая может потратить на разработку лекарств 5 млн долл. или не делать этих инвестиций. Если одна из компаний инвестирует в разработку, а вторая — нет, то первая займет весь рынок и получит выручку 20 млн долл. (вторая потеряет бизнес). Если обе компании решат инвестировать в разработки, то получат по 10 млн долл. выручки, а если обе не инвестируют, то выручка составит по 7 млн долл.

а) Найдите равновесие по Нэшу, если компании вступают в сговор и могут контролировать действия друг друга.

б) Ответьте на тот же вопрос, если в сговоре они не смогут контролировать действия друг друга.

в) Если взаимодействие повторяется много раз, то какой исход наиболее вероятен?

Задача 12. Две фирмы, конкурирующие на мировом рынке, одновременно принимают решение о выпуске нового продукта. Издержки разработки этого продукта настолько велики в сравнении с емкостью рынка, что фирмы получают от его продаж отрицательную прибыль -20 , если выпускают новый продукт обе. Если же только одна фирма произведет новый продукт, то она получит прибыль 100 . Если фирма не выпускает новый продукт, то она не несет никаких издержек и не получает никаких выгод.

а) Найдите равновесия по Нэшу.

б) Государство, на территории которого работает фирма 1, готово перед началом игры предоставить этой фирме паушальную субсидию, чтобы закрепить ее доминирующее положение. Рассчитайте минимально необходимый размер такой субсидии.

в) Если субсидия, описанная в предыдущем пункте, составила s_A , то какую субсидию s_B должно выплатить другое государство второй фирме, чтобы вторая фирма тоже стала производить продукт?

г) Может ли в условиях предыдущего пункта другое государство так подобрать величину s_B , чтобы она осталась на рынке единственным производителем? Если да, рассчитайте минимальный размер такой субсидии.

д) Сравните ситуации отсутствия субсидий, наличия только субсидии s_A и субсидий s_A и s_B с точки зрения эффективности.