

Математика

Поиск экстремумов функций одной переменной

Задача 1. Докажите, что если предельные издержки фирмы возрастают, то в точке минимума средних издержек, если она существует, средние издержки равны предельным.

Задача 2.

- а) Найдите номер наибольшего члена последовательности $y_n = n^{10}/2^n$.
- б) Ответьте на вопрос предыдущего пункта, не прибегая к дифференцированию.

Задача 3. Вася устроился на работу с зарплатой 60 000 руб. в месяц, которая выплачивается в конце каждого месяца. Половину своего заработка он откладывает на черный день в ящик стола.

а) Через сколько месяцев реальная величина¹ накоплений Васи, хранящихся в ящике стола, достигнет своего максимума, если уровень инфляции стабилен и составляет 2,5 % в месяц?

б) Ответьте на тот же вопрос, если деньги Вася откладывает не в ящик стола, а на депозит в банке, ставка процента по которому составляет 2,5 % в месяц.

Задача 4. Найдите интервалы монотонности и исследуйте на экстремумы функции:

- а) $y = x^2$;
- б) $y = x^3$;
- в) $y = x^3 + 1$;
- г) $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$;
- д) $y = x^3/(1+x)$;
- е) $y = \sqrt[3]{x-1}$;
- ж) $y = x^2(x-1)^3$;
- з) $y = (x^2 - 4x + 3)^{100500} + 100500$.

Задача 5. (Окружная олимпиада по предпринимательству, 2007)

Фирма «Шутка», работающая на конкурентном рынке, занимается производством смеха. Фирма обнаружила довольно странную функцию общих издержек, характерных только для производства смеха: $TC(Q) = \sqrt{Q}$, где Q — объем выпуска единиц смеха. Одной произведенной единицы смеха достаточно, чтобы насмешить одного человека. Постоянные издержки производства смеха отсутствуют.

Определите уравнение функции предложения фирмы в краткосрочном периоде $Q_s(P)$, полагая, что по техническим причинам фирма «Шутка» может максимально произвести объем продукции, достаточный, чтобы насмешить 100 человек.

Задача 6. (Всероссийская олимпиада по экономике, 2005)

Кривая спроса на монопольном рынке задана функцией $Q = 100/P^2$. Краткосрочные предельные издержки фирмы имеют вид $MC = 10/(Q+1)$.

- а) Определите оптимальный объем выпуска.
- б) Допустим, открыта новая технология, которая позволяет фирме вдвое увеличить максимальную границу объема выпуска в краткосрочном периоде, но не изменяет функцию издержек. Каким образом это событие отразится на объеме выпуска и цене монополиста?

¹Реальная величина — рассчитанная в сопоставимых ценах, то есть «очищенная» от влияния инфляции и отражающая покупательную способность.

Задача 7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = |x^2 - 3x + 2|$ на отрезке $[-10; 10]$.

Задача 8. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^2$$

на множестве $[-1; 0] \cup (1; 4]$.

Задача 9. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = x(x-3)^2$$

на множестве $[-1; 2]$.

Задача 10. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = \frac{1}{4}x^2(x-3)$$

на множестве $[-1; 4] \cup (5; 9]$.

Задача 11. В городе Дурове 100 жителей, и ни один из них не был подключен к Интернету, пока там не появился провайдер «СейфКуб», ставший монополистом на рынке.

Особенности технологии таковы, что на обслуживание каждого десятка пользователей компания несет издержки в размере 10 000 HS€ (если нужно подключить меньше 10 пользователей, то издержки на них всё равно составят 10 000 HS€).

Поскольку в Интернете есть популярная социальная сеть, каждый житель Дурова считает свою пользу от него тем существеннее, чем больше горожан подключено к сети. Из-за этого максимальная готовность i -го дуровца платить провайдеру зависит от того, сколько всего дуровцев подключено к Интернету (включая его самого): он готов платить за подключение $(100 - i) \cdot Q$ HS€, где Q — общее количество подключившихся к сети горожан.

Если фирма «СейфКуб» будет максимизировать прибыль, то какую абонентскую плату она установит и сколько горожан подключит? (Найдите все равновесия или докажите, что их не существует.)

Учтите, что количество дуровцев может выражаться только целым числом.

Задача 12. Человек, стоящий на берегу моря, бросает в море небольшой объект, который летит по диагонали квадрата стороны a , одна из сторон которого лежит на прямой, образующей край берега. После того, как объект приземляется на воду (на воде он неподвижен), за ним устремляется стоявшая рядом с человеком собака. Собака может бежать по берегу со скоростью V_1 и плыть по воде со скоростью V_2 , $V_1 > V_2$. Какой маршрут выберет собака, если она минимизирует время, затраченное на то, чтобы добраться до упавшего в воду объекта?