Задача 7. Великие стеклодувы

Великие стеклодувы Адриан (А), Бенни (Б) и Вальдемар (В) выдувают из стекла, общий запас которого равен 16, три вида фигурок: икс(x), игрек(y) и дзет(z).

Технология производства фигурок представлена в таблице:

Стеклодув	a_x	a_y	a_z
Андриан	1	2	4
Бенни	1	4	2
Вальдемар	2	1	4

, где a_i – количество единиц *i-го* типа фигурок, которое способен изготовить стеклодув из 1 единицы стекла.

а) Выведите уравнение КПВ цеха, считая, что стекло можно распределить в любой пропорции между работниками.

Известно, что КПВ соседнего цеха описывается уравнением $2Y + Z = 64$ (стеклодувы из второго цеха не умеют производить фигурки типа икс).

Фабрика продает фигурки только наборами, состоящими из фигурок всех типов в пропорции $1 : 1 : 1$.

б) Какое максимальное *целое* количество наборов сможет изготовить фабрика, если стекло нельзя транспортировать между цехами?

Решение:

а) Заметим, что для производства Андрианом x_A единиц икса необходимо x_A единиц стекла, для производства $y_\text{А}$ единиц игрека необходимо $y_\text{А}/2$ единиц стекла, а для производства z_A дзетов соответственно $z_A/4$ единиц стекла. Из ограничения на количество стекла выведем уравнения КПВ каждого работника (они нам ещё пригодятся), если *j-ому* работнику выделили F_j единиц стекла.

$$\begin{cases} x_\text{А} + 0.5y_\text{А} + 0.25z_\text{А} = F_1 & \text{– КПВ Адриана} \\ x_\text{Б} + 0.25y_\text{Б} + 0.5z_\text{Б} = F_2 & \text{– КПВ Бенни} \\ 0.5x_\text{В} + y_\text{В} + 0.25z_\text{В} = F_3 & \text{– КПВ Вальдемара} \\ F_1 + F_2 + F_3 = 16 & \text{– ресурсное ограничение} \\ x_\text{А} + x_\text{Б} + x_\text{В} = X \\ y_\text{А} + y_\text{Б} + y_\text{В} = Y \\ z_\text{А} + z_\text{Б} + z_\text{В} = Z \end{cases}$$

Утверждение 1. Фигурки икс Вальдемар производит с наименьшими издержками относительно ресурса, а значит он будет производить весь икс ($x_A = x_\text{Б} = 0$, $x_\text{В} = X$).

Утверждение 2. Фигурки игрек Бенни производит с наименьшими издержками относительно ресурса, а значит он будет производить весь ирек ($y_\text{А} = y_\text{В} = 0$, $y_\text{Б} = Y$).

Утверждение 3. Фигурки дзет Бенни производит большими издержками относительно ресурса, чем это делает Адриан и Вальдемар, а значит Бенни не будет производить дзет ($z_\text{Б} = 0$).

Система примет вид:

$$\begin{cases} 0.25z_A = F_1 \\ 0.25Y = F_2 \\ 0.5X + 0.25z_\text{В} = F_3 \\ F_1 + F_2 + F_3 = 16 \\ z_\text{А} + z_\text{Б} = Z \end{cases} \Rightarrow$$

Сложим первые три уравнения:

$$0.5X + 0.25Y + 0.25(\underbrace{z_\text{А} + x_\text{В}}_{Z}) = 16 \Rightarrow 2X + Y + Z = 64 \text{– КПВ первого цеха}$$

б) Введем индексы: КПВ первого цеха: $2X_1+Y_1+Z_1=64$, КПВ второго цеха: $2Y_2+Z_2=64$. Пусть количество комплектов равно N, тогда $X_1=Y_1+Y_2=Z_1+Z_2=N$.

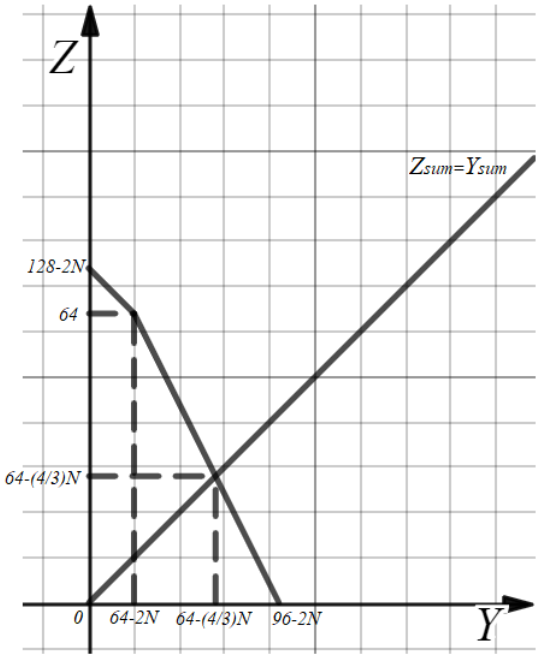
В этом случае уравнения КПВ двух цехов примут вид:

$$\begin{cases} Y_1+Z_1=64-2N \\ 2Y_2+Z_2=64 \end{cases}$$

Сложим двумерные КПВ классическим образом при фиксированном $N \leqslant 32$. Тогда КПВ фабрики описывается:

$$Z_{sum}=\begin{cases} 128-2N-Y_{sum} & ,0 \leqslant Y_{sum} \leqslant 64-2N \\ 192-4N-2Y_{sum} & ,64-2N \leqslant Y_{sum} \leqslant 96-2N \end{cases}$$

, где $Z_{sum}=Z_1+Z_2$, $Y_{sum}=Y_1+Y_2$.



Заметим, что луч $X_{sum}=Y_{sum}$, проходит ниже точки $(64-2N;64)$, поэтому необходимо рассмотреть второй участок КПВ $(64-2N \leqslant Y_{sum} \leqslant 96-2N)$. Не трудно почитать, что КПВ пересекается с лучом $X_{sum}=Y_{sum}$ в точке $(64-\frac{4}{3}N;64-\frac{4}{3}N)$.

Точка $(64-\frac{4}{3}N;64-\frac{4}{3}N)$ должна лежат левее точки $(N;N)$ – это является условием того, что необходимую пропорцию производства удастся соблюсти. Откуда $64-\frac{4}{3}N \leqslant N \Rightarrow N \leqslant 27\frac{2}{3}$. С учетом целочисленности максимальное количество товаров, которое способна произвести фабрика, равно 27.

Пример: $X_1=27; Y_1=10; Y_2=17; Z_1=0; Z_2=27$

Примечание: Так как ресурсы в оптимуме тратятся не полностью в п. *б)* можно рассмотреть массу примеров, но для строго решения можно не приводить примеры распределений.

Ответ: а) $2X+Y+Z=64$; б) 27.