

Задача “Семейный бюджет”

В семье четыре человека: мама, папа, сын и дочь. Каждую неделю дети вместе с одним из родителей на весь день отправляются гулять в парк, где они обычно покупают хот-доги и мороженное. Хот-дог стоит 200 рублей, мороженное – 100 рублей. Предпочтения сына и дочери задаются функциями полезности

$$u_s = (x_s^2 - 8x_s - 4y_s + y_s^2)^{-1} \quad \text{и} \quad u_d = (x_d^2 - 4x_d - 8y_d + y_d^2)^{-1}$$

соответственно, где x_s и x_d – количества съеденных ими хот-догов, а y_s и y_d – количества купленных ими порций мороженого. Каждый покупает себе еду самостоятельно, поэтому и при входе в парк мама или папа делит на троих дневной бюджет в размере $I = 2700$ рублей. При этом дележе предпочтения мамы и папы описываются функциями полезности

$$u_m = I_s \cdot I_d \cdot (I - I_s - I_d) \quad \text{и} \quad u_f = u_s + u_d + (x_f^2 - 6x_f - 6y_f + y_f^2)^{-1}$$

соответственно, где I_s – бюджет сына, I_d – бюджет дочери, а x_f и y_f – количества хот-догов и порций мороженого, которые покупает папа.

- Как будет распределён бюджет, если дети идут в парк вместе с мамой? Будет ли Парето-эффективным распределение средств между сыном и дочерью? А между сыном, дочерью и мамой?
- Как вы ответите на те же три вопроса в том случае, когда дети идут гулять вместе с папой?
- С кем из родителей больше нравится ходить в парк сыну и дочери, если и с мамой, и с папой им одинаково интересно? Как этот результат можно объяснить интуитивно?

Решение.

(а)

Произведение нескольких чисел с постоянной суммой максимально, когда эти числа равны, следовательно, мама поделит деньги поровну между собой и двумя детьми: $I_s^* = I_d^* = I - I_s^* - I_d^* = \frac{I}{3} = \frac{2700}{3} = 900$ рублей (так её полезность будет максимальной). Формально это можно доказать, приравняв производные u_m по I_s и по I_d к нулю и решив получившуюся систему уравнений.

Полезность сына максимальна в точке $(x_s^* = 4; y_s^* = 2)$, полезность дочери – в точке $(x_d^* = 2; y_d^* = 4)$. Оптимальный набор сына стоит 1000 рублей, а оптимальный набор дочери – всего 800 рублей. Каждый из них получит по 900 рублей, поэтому дочь сможет позволить себе свой оптимальный набор (у неё даже останется 100 лишних рублей), а сын – нет (ему как раз 100 рублей и не хватит). Это значит, что возможно Парето-улучшение распределения средств между сыном и дочерью: если дочь отдаст своему брату лишние 100 рублей, то её полезность не уменьшится, а полезность брата вырастет (станет максимальной). Вывод: распределение средств между сыном и дочерью не является Парето-эффективным.

Ситуация, когда бюджет делится на троих поровну, для мамы оптимальна, а любое перераспределение денег приведёт к снижению её полезности. Это значит, что исходное распределение средств между сыном, дочерью и мамой Парето-эффективно.

(b)

Суммарная полезность папы складывается из полезности сына, полезности дочери и непосредственно его собственной полезности. Вспомним, что 1000 рублей – это минимальный бюджет, максимизирующий полезность сына, а 800 рублей – минимальный бюджет, при котором может быть максимальной полезность дочери. Собственная полезность папы максимальна в точке $(x_f^* = 3; y_f^* = 3)$, такой набор стоит 900 рублей. Это означает, что, грамотно поделив 2700 рублей между собой, сын, дочь и папа смогут достичь максимума своих собственных полезностей, а значит, и максимума суммарной полезности папы. Итак, если дети идут в парк с папой, то деньги будут распределяться следующим образом: $I_s^* = 1000$ сыну, $I_d^* = 800$ дочери и $I - I_s^* - I_d^* = 900$ папе, то есть папа выдаст каждому ровно столько денег, сколько нужно.

Поскольку брат и сестра получают максимальную полезность, каждый исходя из минимального подходящего для этого бюджета, то любое перераспределение средств между ними обязательно ухудшит полезность хотя бы одного из них. Значит, распределение денег между ними Парето-оптимально.

Аналогичным рассуждением можно показать, то распределение средств между сыном, дочерью и отцом тоже Парето-оптимально.

(c)

Дочери неважно, с кем ходить в парк, поскольку с обоими родителями она получает одну и ту же (максимальную) полезность. Сыну же больше нравится гулять вместе с папой, потому что только так его полезность может быть максимальной. Так происходит, потому что мама стремится уравнивать детей в возможностях, несмотря на то что они не хотят использовать эти возможности в одинаковой степени (мама не учитывает тот факт, что предпочтения детей относительно благ различаются). Папа, напротив, максимизирует сумму полезностей детей (и свою собственную): он как бы лучше чувствует их потребности и, исходя из этого, распределяет бюджет.