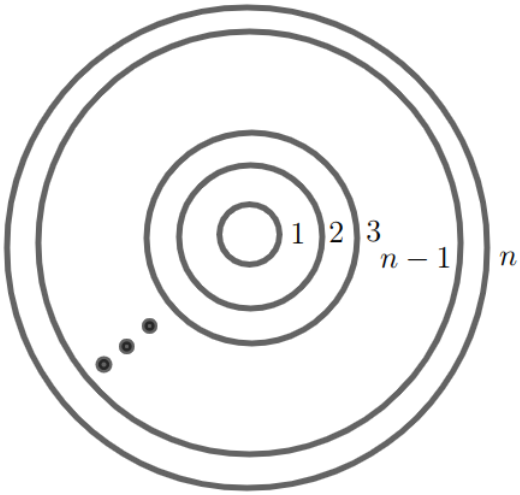
Задание 2. *Садовое неравенство* *(20 баллов)*

Рассмотрим садовое товарищество, организованное в виде кольцевых дорожек, вблизи которых расположены дома (см. рисунок).



На i-*ой* дорожке (считая от центра) живут i идентичных дачников. Суммарный доход, получаемый жителями i-*го* кольца, равен $n+1-i$ млн руб., где n – количество (не менее двух) дорожек в садовом товариществе.

а) *(2 балла)* Может ли коэффициент Джини, отражающих неравенство в распределении доходов между дачниками, быть равен 1/4?

б) *(4 балла)* Может ли коэффициент Джини быть равным 4/9?

в) *(14 баллов)* Определите верхнюю границу коэффициента Джини.

Решение:

а) Важно заметить, что чем дальше рассматриваемая группа дачников (дорожка) живет от центра, тем она беднее. А значит коэффициент Джини минимален тогда, когда минимально количество дорожек в этом товариществе. Если $n = 2$ (минимальное допустимое количество), то на первом кольце живет всего один дачник и владеет 2 млн. рублей. На втором кольце живут два дачника, владеющие суммарно 1 млн. руб.

Из полученных данных находим коэффициент Джини для двух групп по общеизвестной формуле:

$$G = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Полученный коэффициент Джини минимален, а значит меньшего значения не могло получится.

б) Рассмотрим случай $n = 3$, тогда коэффициент Джини окажется равным 4/9.

в) Найдем зависимость коэффициента Джини G от количества дорожек в саду.

Так как в условии ведется расчет доходов и населения от центра, то есть от богатых к бедным, необходимо заменить i на $(n + 1 - j)$, где j – номер дорожки с края сада.

Таким образом мы будем считать "от бедных к богатым". Тогда суммарный доход, получаемый жителями j-*го* кольца равен j, а численность населения j-*го* кольца равна $n+1-j$.

Найдем суммарный доход всех жителей сада и общую численность населения:

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} \text{ – суммарный доход}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \big(n+1-j\big) = \frac{n(n+1)}{2} \text{ – численность населения}$$

Откуда

$$\frac{2j}{n(n+1)} \text{ – доля } j\text{-ой дорожки в совокупном доходе сада,}$$

$$\frac{2(n+1-j)}{n(n+1)} \text{ – доля } j\text{-ой дорожки в общем населении сада.}$$

Найдем **кумулятивную** долю доходов k и $k-1$ кольца:

$$y_k^{cum} = \sum_{j=1}^{k} \frac{2j}{n(n+1)} = \frac{k(k+1)}{n(n+1)}$$

$$y_{k-1}^{cum} = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{2j}{n(n+1)} = \frac{k(k-1)}{n(n+1)}$$

Заметим, что площадь k-*ой* фигуры под кривой Лоренца будет определяться по формуле (площадь трапеции, причем первая трапеция с нулевым основанием):

$$S_j = \frac{1}{2} \cdot x_k \cdot \left(y_{k-1}^{cum} + y_k^{cum} \right)$$

Откуда площадь S_{sum} под кривой Лоренца:

$$S_{sum} = \sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} x_k \left(y_{k-1}^{cum} + y_k^{cum} \right) \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2(n+1-k)}{n(n+1)} \cdot \left(\frac{k(k+1)}{n(n+1)} + \frac{k(k-1)}{n(n+1)} \right) \right) = \frac{n+2}{6n}$$

Тогда коэффициент Джини равен:

$$G = \frac{0.5 - S_{sum}}{0.5} = 1 - 2S_{sum} = \frac{2n-2}{3n}.$$

Определим верхнюю границу коэффициента Джини, посчитав предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-2}{3n} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: а) нет б) да в) 2/3.