

# Математика

## Вариант 1

1. Концерт посетило 2011 человек из 4 стран. Билеты продавались по цене 250 €, 251 €, 252 €, ..., 499 €, 500 €. Верно ли, что по крайней мере три человека из одной и той же страны купили билеты по одной цене?

*Решение.* Поскольку

$$\frac{2011}{4} = 502.75,$$

то по крайней мере из одной страны на концерте было не меньше, чем 503 человека. Действительно, если бы из каждой страны на концерте было не более 502 человек, то всего на концерте было бы не более, чем  $4 \cdot 502 = 2008$  человек. Рассмотрим группу тех 503 человек, которые приехали из одной страны. Поскольку имеется 251 возможность для цен билетов (250, 251, ..., 500) и

$$\frac{503}{251} = 2 \frac{1}{251},$$

то по крайней мере 3 человека из этой страны купили билеты по одной цене. Действительно, если бы по каждой цене было куплено не более двух билетов, то всего этими 503 людьми было бы куплено не более, чем  $251 \cdot 2 = 502$  билета.

*Ответ:* верно.

2. Квадрат разрезали на 49 квадратов, длины сторон которых --- целые числа. Известно, что 48 из них имеют площадь 1. Какую наибольшую площадь может иметь исходный квадрат?

*Решение.* На первый взгляд может показаться, что оставшийся 49-й квадратик тоже должен иметь площадь 1, и, тем самым, наибольшая возможная площадь исходного квадрата равна 49, но это не так. Выясним какой размер может иметь 49-й кубик. Пусть  $x$  — длина стороны 49-го квадрата и  $y$  — длина стороны исходного квадрата. Тогда  $x^2 + 48 = y^2$ . По условию, число  $x$  — целое. Ясно, что и число  $y$  является целым. Имеем

$$y^2 - x^2 = 48, \quad (y - x)(y + x) = 48.$$

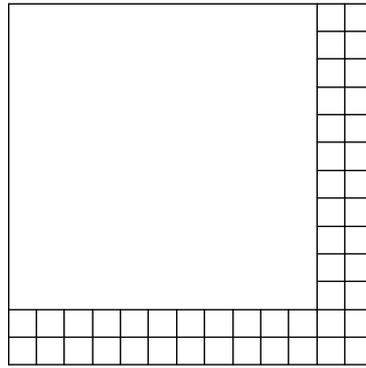
Заметим, что  $y > x$  и  $y - x < y + x$ . Число 48 можно разложить на два множителя, из которых первый меньше второго следующими способами

$$48 = 1 \cdot 48, \quad 48 = 2 \cdot 24, \quad 48 = 3 \cdot 16, \quad 48 = 4 \cdot 12, \quad 48 = 6 \cdot 8.$$

Таким образом, получаем 5 систем:

$$\begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = 48, \end{cases} \quad \begin{cases} y - x = 2 \\ y + x = 24, \end{cases} \quad \begin{cases} y - x = 3 \\ y + x = 16, \end{cases} \quad \begin{cases} y - x = 4 \\ y + x = 12, \end{cases} \quad \begin{cases} y - x = 6 \\ y + x = 8. \end{cases}$$

Первая и третья системы решений не имеют. Из второй получаем  $x = 11$ ,  $y = 13$ . Из четвертой системы находим  $x = 1$ ,  $y = 7$ . Наконец, из последней системы получаем  $x = 1$ ,  $y = 7$ . Таким образом, исходный квадрат не может иметь длину стороны, отличную от 7, 8, 13. Если мы докажем, что квадрат со стороной 13 можно разрезать на 49 квадратиков, из которых 48 имеют площадь 1 (т.е. длину стороны 1), то мы докажем, что наибольшая возможная площадь исходного квадрата равна  $13^2 = 169$ . Ниже показано такое разбиение.



*Ответ:* 169.

3. Гражданин положил в банк  $a$  тысяч рублей при ставке по вкладу  $b$  процентов годовых ( $a$  и  $b$  — натуральные числа,  $b < 30$ ). При каком значении  $a$  сумма вклада возрастет за два года на 180 тысяч рублей?

*Решение.* Из условия получаем

$$a \left( 1 + \frac{b}{100} \right)^2 - a = 18.$$

Откуда

$$a \left( \left( 1 + \frac{b}{100} \right)^2 - 1 \right) = 18,$$

$$a \left( \left( 1 + \frac{b}{100} - 1 \right) \left( 1 + \frac{b}{100} + 1 \right) \right) = 18,$$

$$a \cdot \frac{b}{100} \left( 2 + \frac{b}{100} \right) = 18,$$

$$ab(b + 200) = 180000,$$

$$ab(b + 200) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^4. \quad (1)$$

Так как  $b$  делит правую часть равенства (1), то  $b = 2^k 3^l 5^m$ , где  $0 \leq k \leq 5$ ,  $0 \leq l \leq 2$ ,  $0 \leq m \leq 4$ . Заметим, что число  $b + 200$  также должно делить правую часть равенства (1). Так как  $200 = 2^3 \cdot 3^2$ , то получаем равенство

$$a \cdot 2^k 3^l 5^m (2^k 3^l 5^m + 2^3 \cdot 3^2) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^4.$$

Из этого равенства видно, что  $k \leq 2$ . Действительно, если  $k \geq 3$ , то левая часть делится на  $2^6$ , а правая не делится на  $2^6$ . Аналогично,  $m \leq 2$ . Действительно, если  $m \geq 3$ , то левая часть делится на  $5^5$ , а правая не делится на  $5^5$ .

Итак, число  $b$  должно иметь вид  $b = 2^k 3^l 5^m$ , где  $0 \leq k \leq 2$ ,  $0 \leq l \leq 2$ ,  $0 \leq m \leq 2$ . Так как, кроме того, по условию  $b < 30$ , т.е.  $2^k 3^l 5^m < 30$ . При  $m = 2$  единственными возможными значениями  $k$  и  $l$  являются  $k = 0$ ,  $l = 0$  (так как в противном случае  $2^k 3^l 5^m > 30$ ). В этом случае  $b = 25$  и  $a = 32$ . Если  $m = 1$ , то единственными возможными значениями для  $l$  являются значения 0 и 1 (так как в противном случае  $2^k 3^l 5^m > 30$ ). Перебирая соответствующие значения для  $b$  получаем  $b = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5 = 15$  и  $b + 200 = 215$ , но 215 не делит правую часть равенства (1), и поэтому такое значение  $b$  не годится. Далее,  $b = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5 = 20$ . Тогда  $b + 200 = 220$  и это число не делит правую часть равенства (1), и поэтому такое значение  $b$  также не годится. Аналогично разбираемся с оставшимися значениями  $b$ , а именно,  $b = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5 = 10$ ,  $b = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5 = 5$ ,  $b = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 1$ ,  $b = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 3$ ,  $b = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 4$ ,  $b = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 12$  и видим, что в каждом из этих случаев соответствующее значение  $b + 200$  не делит правую часть равенства (1). Таким образом, годится единственное значение  $b = 25$ . При этом значении  $b$  (как мы уже отмечали выше) получаем  $a = 32$ . Итак, было положено 320 тысячи под 25% годовых.

*Ответ:* 320 тысячи.

## Вариант 2

1. На футбольный матч было продано 21575 билетов представителям 17 стран. Билеты продавались по цене 600 руб., 601 руб., ..., 1199 руб., 1200 руб. Верно ли, что по крайней мере три человека, купившие билеты по одной и той же цене, являются согражданами?

*Решение.* Поскольку имеется 601 возможность для цен билетов и

$$\frac{21575}{601} = 35 \frac{540}{601},$$

то по крайней мере не менее 36 человек купили билеты по одной цене. Действительно, если бы по каждой из 601-й возможной цены билета было куплено не более 35 билетов, то всего на всего было бы продано не более, чем 21035 билетов. Теперь рассмотрим группу тех 36 человек, которые купили билеты по одной цене. Так как  $\frac{36}{15} = 2.4$ , то среди этих людей есть по крайней мере трое сограждан. Действительно, если бы среди этих 36 человек из каждой из 17 стран было бы не более двух человек, то всего было бы не более  $2 \cdot 17 = 34$  человек, а их 36.

*Ответ:* верно.

2. Квадрат разрезали на 81 квадрат, длины сторон которых --- целые числа. Известно, что 80 из них имеют площадь 1. Какую наибольшую площадь может иметь исходный квадрат?

*Решение.* Рассуждаем так же как в первом варианте. Пусть  $x$  — длина стороны 81-го квадрата и  $y$  — длина стороны исходного квадрата. Тогда  $x^2 + 80 = y^2$ . По условию, число  $x$  — целое. Ясно, что и число  $y$  является целым. Имеем

$$y^2 - x^2 = 80, \quad (y - x)(y + x) = 80.$$

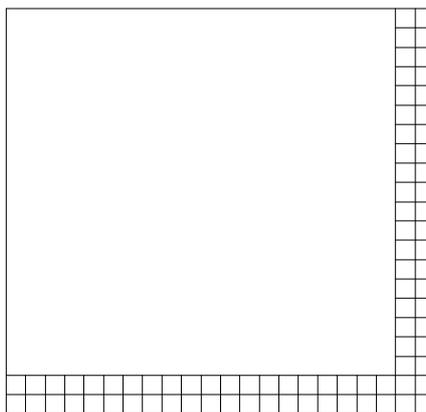
Заметим, что  $y > x$  и  $y - x < y + x$ . Число 80 можно разложить на два множителя, из которых первый меньше второго следующими способами

$$80 = 1 \cdot 80, \quad 80 = 2 \cdot 40, \quad 80 = 4 \cdot 20, \quad 80 = 8 \cdot 10.$$

Таким образом, получаем 4 системы:

$$\begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = 80, \end{cases} \quad \begin{cases} y - x = 2 \\ y + x = 40, \end{cases} \quad \begin{cases} y - x = 4 \\ y + x = 20, \end{cases} \quad \begin{cases} y - x = 8 \\ y + x = 10. \end{cases}$$

Первая система решений не имеет. Из второй получаем  $x = 19$ ,  $y = 21$ . Из третьей системы находим  $x = 8$ ,  $y = 12$ . Наконец, из четвертой системы получаем  $x = 1$ ,  $y = 9$ . Таким образом, исходный квадрат не может иметь длину стороны, отличную от 9, 12, 21. Если мы докажем, что квадрат со стороной 21 можно разрезать на 81 квадратик, из которых 80 имеют площадь 1 (т.е. длину стороны 1), то мы докажем, что наибольшая возможная площадь исходного квадрата равна  $21^2 = 441$ . Ниже показано такое разбиение.



*Ответ:* 441

3. Строительная компания получила в банке кредит в  $a$  млрд. рублей на два года при ставке по кредиту  $b$  процентов годовых ( $a$  и  $b$  — натуральные числа,  $b < 60$ ). Каков был кредит, если известно, что банк получил прибыль 15 млрд. рублей?

*Решение.* Так же как и в 1-м варианте получаем уравнение

$$ab(b + 200) = 150000,$$

т.е.

$$ab(b + 200) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^5.$$

Так как  $b$  делит  $2^4 \cdot 3 \cdot 5^5$ , то  $b = 2^k \cdot 3^l \cdot 5^m$ , где  $0 \leq k \leq 4$ ,  $0 \leq l \leq 1$ ,  $0 \leq m \leq 5$ . Таким образом,

$$a2^k \cdot 3^l \cdot 5^m (2^k \cdot 3^l \cdot 5^m + 2^3 \cdot 5^2) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^5.$$

Заметим, что число  $b + 200$  также должно делить  $2^4 \cdot 3 \cdot 5^5$ . Откуда нетрудно получить, что  $0 \leq k \leq 2$ ,  $0 \leq l \leq 1$ ,  $0 \leq m \leq 3$ . Разбирая всевозможные варианты для показателей степеней, так же как и в 1-м варианте, в итоге получаем, что был выдан кредит в 12 млрд. рублей под 50% годовых.

## Экономика

### Вариант 1

**1.** В Санкт-Петербурге стоимость проезда одной остановки в метрополитене с 1 января 2011 года составляет 25 рублей. За эти 25 рублей пассажир метрополитена может проехать любое количество остановок.

#### **Задание:**

1. Построить график предложения услуг метрополитена в Санкт-Петербурге для одного пассажира на проезд 5-ти остановок, отложив на вертикальной оси координатной плоскости цену поездки в рублях (P), а на горизонтальной оси – количество остановок (Q).

Дать пояснения своим построениям.

2. Найти алгебраическое выражение функции предложения метрополитена для одного пассажира.

#### **Решение:**

##### *Решение задания 1:*

1. Чтобы проехать одну остановку пассажир должен заплатить 25 рублей. Значит, метрополитен предлагает пассажиру проехать первую остановку за 25 рублей. Следовательно, первой точкой графика предложения будет точка с координатами (25,00; 1).

2. Для проезда двух остановок пассажир все равно должен заплатить 25 рублей, как за проезд одной остановки. Однако цена предложения метрополитена одной остановки при проезде пассажиром двух остановок составит  $25 \text{ рублей} / 2 = 12,5 \text{ рублей}$ . Поскольку количество остановок не может быть дробным числом, то следующей точкой графика предложения метрополитена будет точка с координатами (12,5; 2).

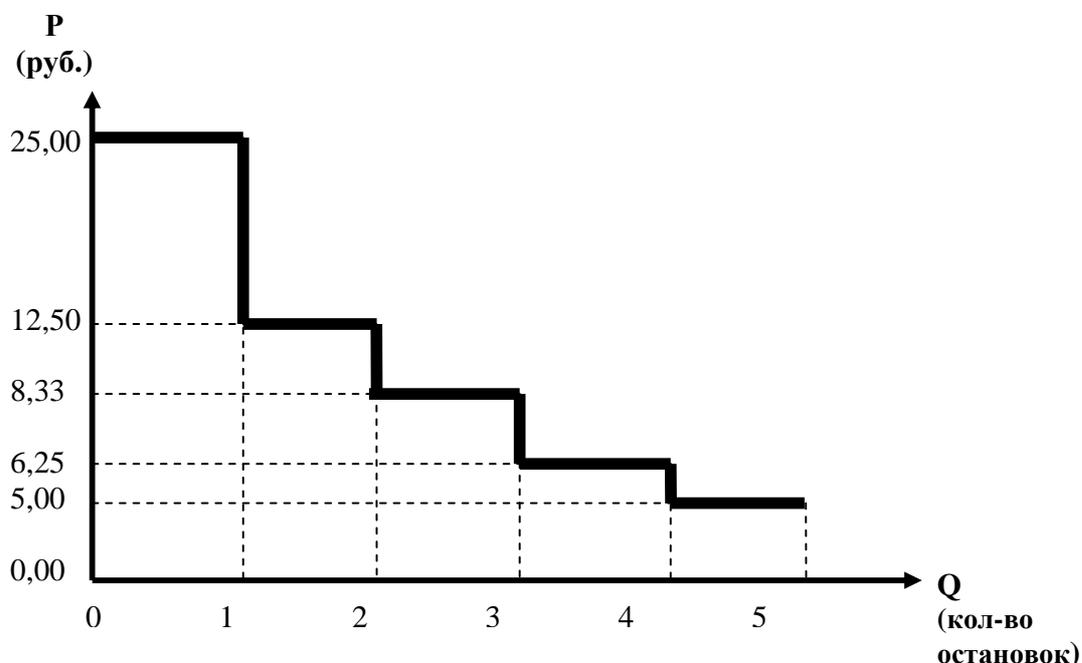
3. Аналогичные рассуждения применяются для определения точек графика предложения метрополитена для 3-й, 4-ой и 5-ой остановок:

- для 3-й остановки (8,33; 3);

- для 4-ой остановки (6,25; 4);

- для 5-ой остановки (5; 5).

По полученным данным строим график предложения услуг метрополитена для одного пассажира:



4. Поскольку известно, что метрополитен является естественным монополистом, то говорить о существовании линии предложения нельзя. Из литературы известно, что монополист не имеет линии предложения. Однако, английский экономист Ф. Уикстид доказал, что кривая предложения монополиста – это на самом деле кривая спроса монополиста на деньги своих потребителей<sup>1</sup>. Поэтому график предложения Санкт-Петербургского метрополитена является линией с отрицательным наклоном.

5. Поскольку количество остановок не является дробным числом, то график предложения монополиста предстает в форме «лестницы».

*Решение задания 2:*

Из решения задания 1 видно, что в алгебраическом виде функция предложения услуг метрополитена для одного пассажира имеет вид:

$$P_s = \frac{25}{Q}$$

2. В двух странах производится один и тот же товар. Функции спроса и предложения на товар в странах заданы: в стране А функция спроса  $Q_D=100-P$ ; функция предложения  $Q_S=P$ ; в стране В функция спроса  $Q_D=200-2P$ ; функция предложения  $Q_S=-10+P$ .  $Q_D$  и  $Q_S$  – количество спроса и предложения в тыс. шт.,  $P$  –

цена единицы товара в рублях. **Определите:**

1. Какие цены установятся на товар в каждой стране при условии отсутствия торговых связей.
2. Если страны открыли границы для беспрепятственного перемещения товаров, каково будет направление и объем перевозок.
3. В случае установления в стране импортере импортной пошлины в размере  $t=1$  рубль на единицу товара, как изменится поток импорта.

**Решение:**

1. В стране А:  $Q_D=100-P=Q_S=P \rightarrow P_A=50$ ;

в стране В:  $Q_D=200-2P=Q_S=-10+P \rightarrow P_B=60$ .

2.  $Q_{\Sigma D}=300-3P=Q_{\Sigma S}=-10+2P$ ;  $P=62$

Отсюда:

- в стране А:  $Q_D=100-62=38$ ;  $Q_S=62$ ; избыток товара в размере 24;

- в стране В:  $Q_D=200-2*62=76$ ;  $Q_S=-10+62=52$ ; дефицит товара в размере 24;

- **объем перевозок: из страны А в страну В 24.**

3. При  $P=62$  размер импорта 24:

- введение импортной пошлины повысит цену до 63;

- тогда в стране В – импортере:

$$Q_D=200-2*63=74;$$

$$Q_S=-10+63=53.$$

- **размер импорта:  $74-53=21$ .**

**3.** Из-за технической ошибки бухгалтера работнику предприятия не доплатили заработную плату в размере 4 тыс. руб. за ноябрь 2010 года. Ошибка была обнаружена при финансовой проверке предприятия 25 февраля 2011 года. 1 марта 2011 года работнику будет выплачена задолженность в размере 4 тыс. руб.

**Определите**, сколько стоил на 1 декабря 2010 года тот набор товаров и услуг, который можно приобрести 1 марта 2011 года на полученные 4 тыс. руб., если темп инфляции в России был стабилен и равнялся 2% в месяц.

**Решение:**

1. Обозначим стоимость набора товаров и услуг как  $X$  (тыс. руб.)

2. При стабильном ежемесячном темпе инфляции стоимость этого набора товаров и услуг через  $n$  месяцев составит по сложному проценту:

---

<sup>1</sup> Гальперин В.М., Игнатьев С.М., Моргунов В.И. Микроэкономика. – СПб.: «Экономическая школа», 2003. С. 90.

$$X_n = X \cdot (1 + 0,02)^n$$

3. По условию задачи:

- $n = 3$  месяца (декабрь 2010 года; январь, февраль 2011 года);
- $X_n = 4$  тыс. руб.

4. Следовательно:

$$4 \text{ тыс. руб.} = X \cdot (1 + 0,02)^3$$

$$X = \frac{4 \text{ тыс. руб.}}{(1 + 0,02)^3} \approx 3769,29 \text{ руб.}$$

**Ответ:** набор товаров и услуг, за который 1 марта 2011 года необходимо будет заплатить 4 тыс. руб., 1 декабря 2010 года стоил 3 769,29 руб.

## Вариант 2

**Решите задачи.**

**1.** После засушливого лета 2010 года на российском рынке зерна сложилась напряженная ситуация, связанная с нехваткой этого важного сельскохозяйственного продукта. Аналитики зернового союза РФ определили, что спрос и предложение на внутреннем рынке зерна в РФ имеют линейный вид. Для решения проблемы насыщения отечественного рынка зерном, руководством страны рассматривается вопрос об импорте зерновых культур в Россию.

Предположим, если отечественный рынок будет открыт для импортеров зерна, то какую импортную пошлину ( $t$ ) следует установить, чтобы поступления в государственный бюджет России от взимания пошлины были максимальными? При этом, известно, что введение пошлины на ввоз зерна в Россию не повлияет на цену зерна на мировом рынке.

**Решение:**

1. Для решения задачи введем обозначения:

$P_{вн}$  – равновесная цена зерна на внутреннем рынке РФ;

$P_m$  – мировая цена зерна;

$t$  – величина таможенной пошлины за единицу ввозимого зерна (в ден.ед.);

$T$  – величина поступлений в бюджет государства от взимания таможенной пошлины;

$P_m + t$  – мировая цена зерна + таможенная пошлина;

$Q_d$  – величина спроса на зерно на внутреннем рынке;

$Q_s$  – величина предложения на внутреннем рынке;

$q$  – величина импорта.

2. На внутреннем рынке импортное зерно будет продаваться по мировой цене ( $P_m$ ) + таможенная пошлина ( $t$ ).

3. Если величина импорта =  $q$ , то поступления в бюджет будут равны:

$$T = q \cdot t.$$

4. Для определения значения таможенной пошлины, которая обеспечила бы максимальные поступления в бюджет, необходимо вычислить производную функции  $T(t)$  и приравнять её к нулю:

$$T'(t) = 0.$$

5. Найдем  $q$ . Величина импорта равна разнице между величиной спроса и предложения на внутреннем рынке:

$$q = Q_d - Q_s$$

$$Q_d = a - bP_{вн}$$

$$Q_s = c + dP_{вн}$$

$$q = (a - bP) - (c + dP)$$

с учетом продажи зерна на внутреннем рынке по мировой цене + таможенная пошлина:

$$q = (a - b(P_M + t)) - (c + d(P_M + t))$$

$$q = a - bP_M - bt - c - dP_M - dt$$

6. В точке равновесия на внутреннем рынке:

$$Q_d = Q_s.$$

Отсюда:

$$a - bP_{вн} = c + dP_{вн}$$

$$c = a - bP_{вн} - dP_{вн}$$

7. Подставим значение «с» в формулу «q»:

$$q = a - bP_M - bt - a + bP_{вн} + dP_{вн} - dP_M - dt$$

$$q = -bP_M - bt + bP_{вн} + dP_{вн} - dP_M - dt$$

Для удобства перегруппируем полученное выражение:

$$q = bP_{вн} + dP_{вн} - dP_M - dt - bP_M - bt$$

8. Поступления в бюджет будут равны:

$$T = q \cdot t$$

$$T = bP_{вн}t + dP_{вн}t - dP_Mt - dt^2 - bP_Mt - bt^2$$

9. Найдем  $T'_{(t)}$ :

$$T'_{(t)} = bP_{вн} + dP_{вн} - dP_M - 2dt - bP_M - 2bt$$

10. Приравняем полученное выражение к нулю:

$$bP_{вн} + dP_{вн} - dP_M - 2dt - bP_M - 2bt = 0$$

Перегруппировав, получим:

$$2dt + 2bt = bP_{вн} + dP_{вн} - dP_M - bP_M$$

Преобразуя полученное выражение, получим:

$$2t(d + b) = P_{вн}(b + d) - P_M(b + d)$$

Разделим обе части полученного уравнения на  $(b + d)$  и получим:

$$2t = P_{вн} - P_M$$

Находим величину пошлины, которая максимизирует поступления в бюджет государства:

$$t = \frac{P_{вн} - P_M}{2}$$

**Ответ:** Максимальную сумму поступлений в бюджет можно обеспечить, если государство установит величину таможенной пошлины на единицу ввозимого зерна, равную половине разницы между внутренней ценой на зерно в РФ и мировой ценой на зерно:

$$t = \frac{P_{вн} - P_M}{2}$$

**2.** В отрасли присутствует 100 фирм, производящих продукцию. Функция валовых затрат для всех фирм одинакова и имеет вид  $ТС = q^2 + 2q + 100$ , где  $q$  – количество производимой продукции одной фирмой в тыс. шт.

**Определите:**

1. Какова функция предложения отдельной фирмы и отрасли в целом.
2. Сколько продукции поставят на рынок все 100 фирм при цене  $P=5$  руб. за шт.
3. Каковы равновесные цена и объем продаж, если спрос на продукцию задан  $Q_D=200-50P$ .

**Решение:**

1.  $MC=(TC)'=(q^2+2q+100)'=2q+2;$

**$q=-1+0,5P$  – функция предложения отдельной фирмы, для 100 фирм функция предложения  $Q_S=-100+50P$ .**

2. При  $P=5$  руб. за шт.  **$Q_S=-100+50*5=150$ .**

3.  **$Q_D=200-50P=Q_S=-100+50P; P=3, Q=50$ .**

**3.** Курс рубля к доллару США в конце 2010 года составлял 30 руб./доллар США. По прогнозу российского правительства в 2011 году темп инфляции в России составит 10%, а по прогнозу правительства США в Америке темп инфляции в 2011 году может составить 5%.

Определите курс рубля к доллару США к концу 2011 года при условии, что изменение этого курса целиком будет определяться темпами инфляции.

**Решение:**

1. Вычислим соотношение темпов инфляции в России и в США:

$$1,10/1,05 = 1,048$$

2. По этому соотношению видно, что из-за разности в темпах инфляции покупательная способность доллара США вырастет в 2011 году в 1,048 раза по сравнению с покупательной способностью рубля.

3. По условию задачи, изменение курсов валют целиком определяется темпами инфляции. Значит, курс рубля по отношению к доллару США можно определить так:

$$30 \cdot 1,048 = 31,44 \text{ руб./доллар США}$$

**Ответ:** курс рубля по отношению к доллару США в 2011 году по прогнозам должен снизиться и составить 31,44 руб./доллар США