

# Сибиряда. Шаг в Мечту

2 марта 2016 года

## Второй тур. Задачи. 11-й класс

Продолжительность работы — 150 минут.

Максимальное количество баллов за задачи — 100.

Каждая задача оценивается из 25 баллов.

Старайтесь излагать свои мысли четко, писать разборчиво. Зачеркнутые фрагменты не будут проверены. Если вы хотите, чтобы зачеркнутая часть была проверена, явно напишите об этом в работе.

Все утверждения, содержащиеся в вашем решении, должны быть либо общеизвестными (стандартными), либо логически следовать из условия задачи или из предыдущих рассуждений. Все неизвестные факты, не следующие тривиально из условия, должны быть доказаны. Если в решении есть противоречащие друг другу суждения, то они не будут оценены, даже если одно из них верное.

Всякий раз четко обозначайте, где начинается решение каждого пункта задачи. Перед началом решения пункта а) можно выписать общую часть, подходящую для всех пунктов, и дальше ссылаться на нее.

Во время написания второго тура вы можете выходить из аудитории только в сопровождении представителя оргкомитета не более чем на несколько минут, при этом выносить из аудитории задания и бланки решений запрещается.

Удачи!

### Задача 1. «Два завода и склад»

Мистер Фейнман очень любит играть на барабанах. В преддверии барабанного фестиваля он решил продавать любимый музыкальный инструмент в своем городе. У Фейнмана есть два небольших заводика, а также склад, на котором уже лежат 5 барабанов. Город представляет собой отрезок длиной 20 км, расположение заводов (и функции издержек на них, рассчитанные в долларах) и склада на рисунке:



Других продавцов барабанов в городе нет, спрос на продукцию Фейнмана имеет вид  $Q = 20 - p$ , где  $p$  — цена в долларах. Все барабаны, которые хранятся на складе и не будут проданы, придется выкинуть.

Мистер Фейнман хотел бы сам контролировать процесс продажи, поэтому откроет только один магазин. Если товар нужно везти в магазин с завода или со склада, Фейнман должен оплатить транспортировку через систему «Сократ» из расчета 1 доллар за километр за каждую единицу продукции. Он планирует выделить для магазина помещение в одном из имеющихся сооружений: на заводе или на складе.

Где мистеру Фейнману следует открыть магазин и сколько барабанов в нем продавать, если он намерен получать максимальную прибыль?

## Задача 2. «Молодильные яблоки и натуральный налог»

В Тридевятом царстве ежегодный спрос рядовых граждан на молодильные яблоки описывается функцией  $Q_d = 100 - 2P$ , а ежегодное предложение яблок местными поставщиками — функцией  $Q_s = 2P - 20$ , где  $Q$  — количество яблок в тоннах, а  $P$  — цена тонны яблок в рублях.

До этого года молодильные яблоки для нужд царского двора на рынке не закупались, так как не было в этом потребности — у царя был свой сад с яблонями. Однако в этом году все яблони в царском саду погибли от неизвестной болезни, а новые саженцы еще не скоро начнут плодоносить. И пришлось царю решать вопрос, как обеспечить поставки молодильных яблок для царского двора. Царские советники для решения этой проблемы подготовили два указа, а вот какой из них подписать, царь никак не может решить.

По указу, подготовленному **молодым советником**, предлагается со всех покупателей молодильных яблок взимать натуральный налог. В этом указе четко прописано: «при покупке любого количества молодильных яблок покупателям следует половину купленных яблок отдать царским сборщикам».

**Старый советник** тоже за взимание натурального налога, но не с покупателей, а с продавцов. В его указе написано: «при продаже любого количества молодильных яблок продавец обязан ровно такое же количество яблок безвозмездно сдать царским сборщикам».

Сидит царь и думает, какой же указ ему подписать, чтобы яблок заполучить побольше. А царский шут ему и говорит: «Да не печалься ты, государь. Теоретически, как мне кажется, результат в обоих случаях будет один и тот же, что для покупателей, что для продавцов, что для тебя. А на практике...».

а) Рассчитайте, сколько царские сборщики могут собрать яблок, если будет подписан указ по рекомендациям молодого советника.

б) Рассчитайте, сколько царские сборщики могут собрать яблок, если будет подписан указ по рекомендациям старого советника.

в) Оцените, прав ли шут в своих предположениях о том, что оба налога одинаковы с точки зрения конечного результата. Если шут не прав, приведите содержательное объяснение получившегося расхождения. А если шут прав, приведите другие экономические аргументы в пользу выбора того или другого налога, которые стоило бы принять во внимание царю.

**Задача 3. «Волшебное зелье»**

До кризиса в городе  $N$  проживали  $M$  волшебников, из них ровно 45 % имели высшее, 30 % — среднее, а остальные — начальное волшебное образование. Все волшебники для своих волшебных нужд предъявляли спрос на волшебное зелье. В таблице представлены данные об индивидуальном спросе волшебника на волшебное зелье, где  $Q$  — величина спроса в литрах, а  $P$  — цена литра волшебного зелья в рублицах.

Образование	Спрос
высшее	$Q = 10 - 2P$
среднее	$Q = 30 - 3P$
начальное	$Q = 60 - 4P$

Когда начался экономический кризис, часть волшебников уехали из города  $N$ , при этом число уехавших волшебников, имевших начальное образование, составило ровно 120 % от уехавших волшебников, имевших среднее образование, и 60 % от числа уехавших волшебников, имевших высшее образование. Известно, что в городе осталась только четверть волшебников с начальным волшебным образованием, а из числа волшебников с высшим образованием осталось не более 40 человек.

- Оцените, сколько волшебников проживало в городе  $N$  до кризиса.
- Определите, какой была функция суммарного рыночного спроса волшебников на волшебное зелье до кризиса.

**Задача 4. «Выбираем пропорцию для салата»**

Поселившись в стране Вега, Юный Экономист стал питаться исключительно салатом из помидоров и огурцов. Пропорция, при которой салат имеет приемлемый для Юного Экономиста вкус, не является жестко заданной. А именно, он готов есть салат, если в нем на 1 огурец приходится от  $1/4$  до 4 помидоров. Полезность порции салата, полученной из 1 огурца и  $k \in [1/4; 4]$  помидоров, равна для него  $\sqrt{k}$ . Юный Экономист располагает бюджетом в размере 1000 д.е. в неделю. Один огурец стоит 20 д.е., а помидор — вдвое дешевле. Полезность Юного Экономиста равна суммарной полезности от всех съеденных за неделю порций салата. Овощи в стране Вега бесконечно делимые.

- Допустим, Юный Экономист решил готовить все порции салата в единой пропорции  $k$  помидоров на 1 огурец. Какое значение  $k$  он выберет, максимизируя свою полезность?
- Может ли полезность Юного Экономиста увеличиться по сравнению с пунктом а), если он будет готовить одну часть порций салата в пропорции  $k_1$ , а другую часть — в пропорции  $k_2$ ?