

Сибириада. Шаг в Мечту

2 марта 2016 года

Второй тур. Задачи. 10-й класс

Продолжительность работы — 150 минут.

Максимальное количество баллов за задачи — 100.

Каждая задача оценивается из 25 баллов.

Старайтесь излагать свои мысли четко, писать разборчиво. Зачеркнутые фрагменты не будут проверены. Если вы хотите, чтобы зачеркнутая часть была проверена, явно напишите об этом в работе.

Все утверждения, содержащиеся в вашем решении, должны быть либо общеизвестными (стандартными), либо логически следовать из условия задачи или из предыдущих рассуждений. Все необщезвестные факты, не следующие тривиально из условия, должны быть доказаны. Если в решении есть противоречащие друг другу суждения, то они не будут оценены, даже если одно из них верное.

Всякий раз четко обозначайте, где начинается решение каждого пункта задачи. Перед началом решения пункта а) можно выписать общую часть, подходящую для всех пунктов, и дальше ссылаться на нее.

Во время написания второго тура вы можете выходить из аудитории только в сопровождении представителя оргкомитета не более чем на несколько минут, при этом выносить из аудитории задания и бланки решений запрещается.

Удачи!

Задача 1. «Субсидия на велосипеды»

Спрос на велосипеды, который предъявляют две группы потребителей, описывается функциями $q_1 = 50 - 5p$ для первой группы и $q_2 = 64 - 4p$ для второй группы. В изначальном равновесии велосипеды покупают только потребители с высоким спросом. Чтобы стимулировать потребителей с низким спросом, государство вводит для них субсидию в размере 2 за каждый купленный велосипед. В новом равновесии велосипеды покупают обе группы потребителей, а равновесная цена увеличилась на 1, равно как и равновесное количество.

а) Выведите функцию предложения велосипедов, если известно, что она линейная.

б) Предположим, что государство вводит аналогичную субсидию и для второй группы потребителей. Чему станет равно количество велосипедов, купленных потребителями с низким спросом? Приведите содержательное экономическое объяснение того, в какую сторону изменилось это количество.

Задача 2. «Винтики и Шпунтики»

Фирма Винтик&Со продает винтики по цене x за штуку и является монополистом на этом рынке. Спрос на винтики задается функцией $Q = 360 - P$. Главной деталью для изготовления каждого винтика являются шпунтик, и кроме как стоимость шпунтика других переменных издержек не требуется. Винтик&Со закупает шпунтики у фирмы Шпунтик&Со по цене y за шпунтик. Предельные издержки изготовления одного шпунтика постоянны и равны 40, фиксированных издержек нет. Найдите x и y , если известно, что больше никакие другие фирмы не производят ни шпунтики, ни винтики.

Задача 3. «Сапоги-сороконожки»

В некотором царстве, в Тридцатом государстве жил-был царь Ерофей — любитель всяческих затей. И затеял он как-то раз модернизировать свою дружину — обуть каждого дружинника в сапоги-сороконожки. Было в его царстве 40 мастеров, которые шили такие сапоги. Приказал Ерофей изымать у каждого мастера половину от того количества, что он сошьет сверх 1 пары в месяц.

а) Сколько дружинников можно будет обуть за месяц, если каждый мастер продает сапоги-сороконожки на рынке совершенной конкуренции и стремится максимизировать прибыль, спрос на них описывается функцией $Q_D = 600 - 10P$, где P — цена пары сапог (руб.), Q — величина спроса в месяц (пар). Издержки изготовления сапог-сороконожек у всех мастеров задаются одинаковой функцией $TC = 2q^2 + 4q + 10$, где q — количество пар сапог, изготавливаемых одним мастером за месяц.

б) Как изменится в результате введения натурального сбора общее количество сапог-сороконожек, изготавливаемых в месяц в царстве Ерофея? Как изменится прибыль каждого мастера?

Задача 4. «Дискретный фактор производства»

Для производства одной единицы товара X требуется одна единица труда, две единицы материала Y , и три единицы материала Z . Цена единицы труда равна 3 д.е., цена единицы материала Y — 2 д.е., а цена единицы материала Z — 1 д.е. Товар X производится на станках; в месяц на одном станке можно произвести максимум 30 000 ед. товара X . Стоимость аренды одного станка равна 120 000 д.е. в месяц. Кроме того, станок потребляет электроэнергию в расчете 1 квт-час на 1 единицу товара X . Стоимость 1 квт-час электроэнергии равна 1 д.е. Все переменные, кроме количества станков, могут принимать не только целые значения. *Количество станков может быть только целым числом.*

а) Обозначим за Q месячный объем производства товара X (в тыс. ед.). Выведите функцию общих издержек производства товара X за месяц, $TC(Q)$, (в тыс. д. е.). (Подсказка: возможно, для записи функции $TC(Q)$ вам понадобится обозначение $[x]$, где $[x]$ — наименьшее целое число, не меньшее x .)

б) Допустим, цена единицы товара X равна 12 д.е. Государство готово выплатить фирме субсидию в размере S тыс. д.е., если фирма выберет любой положительный объем производства. При каком минимальном значении S фирма выберет положительный объем производства? Чему будет равен этот объем?