

11-й класс

Третий этап

Дата написания	25 февраля 2015 г.
Количество задач	4
Сумма баллов	160

Не пытайтесь читать задания до объявления начала написания тура.

Решения заданий выполняются на отдельном бланке.

Математическая справка

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Задача 1. Аннуитет Ерофея**(25 баллов)**

Ерофей взял в «Бета-банке» кредит на сумму B на срок 12 месяцев по ставке $(100r)\%$ в месяц. Договор предусматривает погашение кредита по популярной *аннуитетной* схеме: в конце каждого месяца банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $(100r)\%$), а затем Ерофей переводит в банк некий фиксированный платеж. Банк рассчитал, что, для того чтобы долг был полностью выплачен за 12 месяцев, этот платеж должен равняться X .

а) Выразите B через X и r .

б) В конце третьего месяца Ерофей неожиданно получил на работе премию и решил погасить часть кредита досрочно. При досрочном погашении банк производит перерасчет платежа, который заемщик должен будет ежемесячно вносить в оставшиеся месяцы. Какую сумму Ерофей должен вернуть банку (помимо X) в конце третьего месяца, чтобы в месяцы с 4-го по 12-й платить не X , а Y , где $Y < X$? Ответ выразите через X , Y и r .

Задача 2. Молодильные яблоки**(25 баллов)**

В Тридевятиом Царстве спрос на молодильные яблоки в 2014 году описывался функцией $Q_d = 40 - 2P$, а предложение функцией $Q_s = 16P/3 - 100/3$, где Q — количество молодильных яблок в тоннах, а P — цена тонны яблок в рубниках. В 2015 году спрос на молодильные яблоки не изменился, а вот предложение выросло, да так, что продавцы готовы теперь при любом уровне цен поставлять на продажу на 50% яблок больше по сравнению с прошлым годом. Казалось бы, хороший урожай должен был обрадовать продавцов яблок, однако этого не случилось, и обратились они к царю с просьбой оказать содействие и выделить средства из казны для их поддержки.

а) Проведя расчеты, объясните, почему большой урожай не обрадовал продавцов.

б) Царь дал распоряжение своим советникам — молодому и старому — подготовить рекомендации по оказанию поддержки продавцам молодильных яблок.

- Молодой советник предложил удержать цену на уровне прошлого года, купив часть яблок, чтобы потом, если получится, продать их в Тридесятое Государство.
- Старый советник предложил не торопиться, а подождать до окончания сезона торговли яблоками, а потом выплатить всем продавцам разницу фактических цен этого и прошлого года. По его мнению, этот вариант обойдется дешевле для государственной казны.

Царь согласился с его доводами и подписал соответствующий указ, решив, что обнародует его после установления нового рыночного равновесия в 2015 году. Действительно ли рекомендации старого советника обойдутся государственной казне дешевле, если они не будут обнародованы до установления нового равновесия?

в) Когда царь беседовал со своими советниками, их разговор подслушал шут. У него родилась идея, как можно использовать полученную конфиденциальную информацию для личного обогащения. Все продумав и просчитав, он решил поделиться своими соображениями с представителями продавцов молодильных яблок до принятия ими решения о том, какой объем продавать в 2015 году. Шут попросил за свои услуги 20% от суммы, которую получают продавцы яблок из государственной казны, если воспользуются его рекомендациями. Какие рекомендации разработал хитрый шут? Какую сумму он рассчитывает получить за свои «услуги»?

г) Покажите на графике расходы государственной казны в каждом из следующих случаев:

- Были бы приняты рекомендации молодого советника.
- Принятые рекомендации старого советника оставались бы тайной до установления нового равновесия.
- Продавцы яблок последуют рекомендациям хитрого шута.

Задача 3. Жюльен из мухоморов — 2**(25 баллов)**

Жюльен из мухоморов — деликатес, пользующийся особой популярностью среди гномов. Рецепт его приготовления, однако, известен только лесным гномам. Министр финансов королевства лесных гномов решил организовать продажу деликатеса соседям — горным гномам. Он настаивал на том, что экспорт жульена должен быть государственной монополией, которая будет максимизировать прибыль.

Приготовленный жюльен герметично упаковывается в *кокотницы* (маленький металлический ковшик для подачи жюльена) и расфасовывается по 4 кокотницы в коробку. Издержки производства жюльена описываются функцией $TC = 20 + 10q + q^2/2$, где q — количество кокотниц. Спрос на деликатес в стране горных гномов описывается функцией $N = 225 - 0,5P$, где N — количество коробок, покупаемых за неделю, P — цена за коробку.

Король горных гномов ввел пошлину на ввоз жюльена в размере 10 ден. ед. с каждой ввозимой коробки. Кроме того, дорога в королевство горных гномов лежит через страну эльфов, которые за провоз товара по своей территории забирают 5 коробок жюльена каждую неделю.

Оценив потери государственной монополии от поборов эльфов, министр финансов лесных гномов решил попробовать договориться с ними о замене натурального платежа денежным (также не зависящим от объема продаж). Более того, он убедил министра финансов королевства горных гномов, что замена натурального платежа за провоз жюльена по территории страны эльфов денежным увеличит доходы и казны королевства горных гномов. Поэтому министры договорились, что платить эльфам денежный налог они будут совместно.

Какую наибольшую сумму денежного налога гномы будут готовы сообща платить эльфам за отмену натурального налога?

Задача 4. Счастливые часы**(25 баллов)**

Сеть кафе «У Аристарха» имеет сотни заведений по всему городу. Владелец сети, Аристарх, заметил, что в разное время дня разное количество посетителей хотят заказать фирменное блюдо его ресторанов. Все рестораны открываются в 12 часов, и если одна порция стоит p рублей, в первый час работы посетители покупают $q = 132 - p$ тыс. порций во всей сети. В последний час работы кафе (с 21 до 22 часов) посетители заказывают $q = 141 - p$ тыс. порций. Аристарх вывел следующую зависимость купленных порций от цены и времени: если в период с t до $t + 1$ часов (t — целые числа от 12 до 21) цена составляет p рублей за порцию, то общее количество купленных порций за это время составляет $q = 120 + t - p$ тыс. Производство одной порции стоит 40 рублей, владелец сети старается сделать так, чтобы прибыль (разница между его доходами и расходами) за день работы была максимальной. Считайте, что кроме фирменного блюда в кафе ничего не продается.

а) Какую цену нужно установить Аристарху, если он не хочет менять ее в течение дня?

б) Сын Аристарха, Ксенофонт, предложил папе ввести в его ресторанах «счастливые часы»: назначать одну цену на фирменное блюдо утром (с открытия до X часов) и другую цену вечером (с X часов до закрытия). «Счастливыми часами» называется тот период, когда цена ниже. Не проводя расчетов, объясните, в какое время (в первой части дня или во второй) Аристарху нужно устроить «счастливые часы», и предположите, в какую сторону утренняя и вечерняя цена будет отличаться от цены в пункте а). Приведите содержательное объяснение, почему прибыль при такой политике может увеличиться.

в) Рассчитайте оптимальную длину счастливых часов.