**1.** Премиальный фонд был распределен между тремя сотрудниками в отношении 8:6:5. Если бы этот же фонд был распределен в отношении 7:5:4, то один из сотрудников получил бы на 5 тысяч рублей больше, чем он получил на самом деле. Определите размер премиального фонда.

*Решение:*

Пусть *S* – размер премиального фонда, тогда первый сотрудник получил премию в размере , второй – , а третий – .

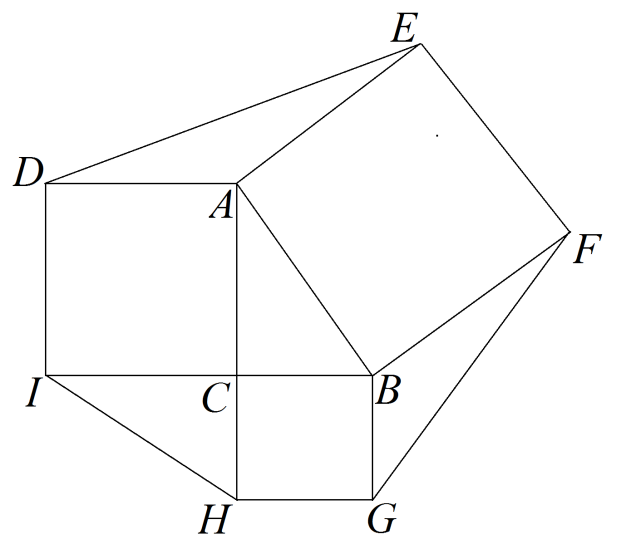
Если бы фонд был распределен в отношении 7:5:4, то первый сотрудник получил бы премию в размере , второй – , а третий – .

Поскольку , , , то на 5 тысяч рублей больше получил первый сотрудник. Следовательно,



*Ответ:* 304 тыс. руб.

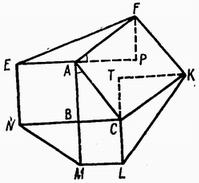
|  |  |
| --- | --- |
| **Оценка в баллах** | **Критерии оценки задания № 1 (8,9,10 классы)** |
| **10 (+)** | В представленном решении обоснованно получен верный ответ. |
| **8 (+ −)** | Общая идея и способ решения верные.  Не выполнены некоторые незначительные промежуточные этапы решения или не приведены некоторые незначительные обоснования.  При этом получен верный ответ. |
| **6 (+/2)** | 1. Приведена верная последовательность шагов решения. При этом допущены описки и/или ошибки в вычислениях и преобразованиях, в результате которых может быть получен неверный ответ. 2. Общая идея и способ решения верные. Не выполнены ряд промежуточных этапов решения или не приведены некоторые обоснования. При этом получен верный ответ. |
| **4 (− +)** | Общая идея решения верная. Не выполнены некоторые существенные промежуточные этапы решения или не приведены некоторые существенные обоснования или решение не завершено.  В результате ошибок мог быть получен неверный ответ. |
| **2 (− .)** | 1. Указан верный ответ, но решение неверное или отсутствует. 2. Приведена верная, но незначительная последовательность шагов решения. |
| **0 (−)** | Все случаи решения, которые не соответствуют  вышеуказанным критериям. |

**2.** На катетах и гипотенузе прямоугольного треугольника *ABC* построены квадраты, расположенные вне треугольника. Полученные таким образом «пифагоровы штаны» увеличили до шестиугольника *DEFGHI*, соединив вершины квадратов, не принадлежащих треугольнику *ABC.*

Докажите, что площадь полученного шестиугольника, равна , где *c* – длина гипотенузы *AB*, а *s* – сумма длин катетов *AC* и *BC* .

*Решение:*

***Не совпадает обозначение вершин!***

Продолжим сторону *EA* и опустим на неё перпендикуляр *FP* .

Продолжим также сторону *CL* и опустим на неё перпендикуляр *KT*.

Треугольники *TCK* и *PFA* равны треугольнику *ABC* (по гипотенузе и острому углу, например, *http://www.problems.ru/show_document.php?id=1590549FAP=http://www.problems.ru/show_document.php?id=1590549 BAC* как углы со взаимно перпендикулярными сторонами).

Треугольник *BMN* равен треугольнику *ABC* .

Треугольник *EAF* равновелик треугольнику *AFP* , треугольник *LCK* равновелик треугольнику *CTK* , так как *FA* есть медиана треугольника *EFP* , а *CK* – медиана треугольника *TKL* .

Таким образом, площадь нашего шестиугольника состоит из площади трёх квадратов и четырёх равновеликих треугольников.

Если *a* – длина катета *BC*, a b – длина катета *AC*, то искомая площадь равна



|  |  |
| --- | --- |
| **Оценка в баллах** | **Критерии оценки задания № 2 (8,9,10 классы)** |
| **10 (+)** | В представленном решении приведено полное доказательство утверждаемого факта. |
| **8 (+ −)** | Общая идея и способ доказательства верные, но не приведены некоторые незначительные обоснования. |
| **6 (+/2)** | Общая идея и способ доказательства верные, но не приведены некоторые обоснования. |
| **4 (− +)** | Общая идея и способ доказательства верные, но не приведены существенные обоснования. |
| **2 (− .)** | Приведена верная, но незначительная последовательность шагов доказательства. |
| **0 (−)** | Все случаи решения, которые не соответствуют  вышеуказанным критериям. |

**3.** Имеется 43 вагона первого типа, которые вместе вмещают на 2152 контейнера меньше, чем все имеющиеся вагоны второго типа, количество которых находится в пределах от 70 до 230. Определите количество вагонов второго типа, если каждый из них вмещает на три контейнера больше, чем один вагон первого типа.

*Решение:*

Пусть *n* – количество контейнеров, которое вмещает вагон первого типа, тогда  – количество контейнеров, которое вмещает вагон второго типа.

Обозначим через *m* количество вагонов второго типа, тогда по условию задачи имеем:

.

Остается выбрать такие натуральное числа *n* при котором число *m* будет также натуральным.

.

Число m будет натуральным, если  будет равно одному из следующих чисел: 7, 17, , , . В этом случае число m будет принимать следующие значения: 332, 162, 60, 50, 44.

Учитывая условие задачи, получаем *m* = 162.

*Ответ*: 162.

|  |  |
| --- | --- |
| **Оценка в баллах** | **Критерии оценки задания № 3 (8,9,10 классы)** |
| **10 (+)** | В представленном решении обоснованно получен верный ответ. |
| **8 (+ −)** | Общая идея и способ решения верные.  Не выполнены некоторые незначительные промежуточные этапы решения или не приведены некоторые незначительные обоснования.  При этом получен верный ответ. |
| **6 (+/2)** | 1. Приведена верная последовательность шагов решения. При этом допущены описки и/или ошибки в вычислениях и преобразованиях, в результате которых может быть получен неверный ответ. 2. Общая идея и способ решения верные. Не выполнены ряд промежуточных этапов решения или не приведены некоторые обоснования. При этом получен верный ответ. |
| **4 (− +)** | Общая идея решения верная. Не выполнены некоторые существенные промежуточные этапы решения или не приведены некоторые существенные обоснования или решение не завершено.  В результате ошибок мог быть получен неверный ответ. |
| **2 (− .)** | 1. Указан верный ответ, но решение неверное или отсутствует. 2. Приведена верная, но незначительная последовательность шагов решения. |
| **0 (−)** | Все случаи решения, которые не соответствуют  вышеуказанным критериям. |

**4.** Решите систему уравнений 

*Решение:*



Из второго уравнения следует, что  и , следовательно,  и .

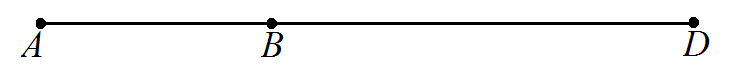
Таким образом, данная система имеет единственное решение .

*Ответ:* 

|  |  |
| --- | --- |
| **Оценка в баллах** | **Критерии оценки задания № 4 (8,9,10 классы)** |
| **10 (+)** | В представленном решении обоснованно получен верный ответ. |
| **8 (+ −)** | Общая идея и способ решения верные.  Не выполнены некоторые незначительные промежуточные этапы решения или не приведены некоторые незначительные обоснования.  При этом получен верный ответ. |
| **6 (+/2)** | 1. Приведена верная последовательность шагов решения. При этом допущены описки и/или ошибки в вычислениях и преобразованиях, в результате которых может быть получен неверный ответ. 2. Общая идея и способ решения верные. Не выполнены ряд промежуточных этапов решения или не приведены некоторые обоснования. При этом получен верный ответ. |
| **4 (− +)** | Общая идея решения верная.  Не выполнены некоторые существенные промежуточные этапы решения или не приведены некоторые существенные обоснования или решение не завершено.  В результате ошибок мог быть получен неверный ответ. |
| **2 (− .)** | 1. Указан верный ответ, но решение неверное или отсутствует. 2. Приведена верная, но незначительная последовательность шагов решения. |
| **0 (−)** | Все случаи решения, которые не соответствуют  вышеуказанным критериям. |

**5.** Петр приехал в гости к друзьям, Василию и Татьяне. Василий выехал из дома так, чтобы встретить Петра на автобусной остановке ровно в 14 часов. Петр выехал заранее и приехал на остановку в 12:30. Выйдя из автобуса, Петр пошел по единственной дороге, ведущей к дому друзей. Василий, встретив Петра, посадил его в машину и привез домой на 10 минут раньше, чем их ждала Татьяна. Во сколько раз скорость Петра меньше скорости автомобиля Василия, если скорости Петра и автомобиля были постоянны?

*Решение:*



Изобразим схематично дорогу от автобусной остановки до дома, как отрезок *АD*, где *А* – автобусная остановка, *D* – дом Василия.

Петр и Василий встретились в точке *В*, которая находится на отрезке *АD* между *А* и *D*. Очевидно, |*АВ*|+|*ВD* |=|*АD* |.  При этом Петр прошел пешком расстояние, равное |*АВ*|.  Если бы Василий встретил Петра на автобусной остановке, то проехал бы расстояние 2|*АD*| = 2(|*АВ*|+|*ВD*|). Встретив Петра в точке *В*, Василий проехал расстояние 2|*ВD*|, тем самым сократив время поездки на 10 минут, а пройденный путь на 2|*АВ*|. Значит, расстояние |*АВ*| Василий проехал бы за 10:2 = 5 минут.  На это же время сократилось время до встречи. Так как Василий планировал встретить Петра в 14:00, то в дороге Петр и Василий встретились в 13:55.  Следовательно, Петр шел 13:55–12:30= 1ч 25 минут = 85 минут. Таким образом, то расстояние, которое Василий проезжает за 5 минут, Петр проходит за 85 минут. Итого, скорость автомобиля Василия более скорости Петра в 85:5 = 17 раз.

*Ответ:* в 17 раз.

|  |  |
| --- | --- |
| **Оценка в баллах** | **Критерии оценки задания № 5 (8,9,10 классы)** |
| **15 (+)** | В представленном решении обоснованно получен верный ответ. |
| **12 (+ −)** | Общая идея и способ решения верные.  Не выполнены некоторые незначительные промежуточные этапы решения или не приведены некоторые незначительные обоснования.  При этом получен верный ответ. |
| **9 (+/2)** | 1. Приведена верная последовательность шагов решения. При этом допущены описки и/или ошибки в вычислениях и преобразованиях, в результате которых может быть получен неверный ответ. 2. Общая идея и способ решения верные. Не выполнены ряд промежуточных этапов решения или не приведены некоторые обоснования. При этом получен верный ответ. |
| **6 (− +)** | Общая идея решения верная. Не выполнены некоторые существенные промежуточные этапы решения или не приведены некоторые существенные обоснования или решение не завершено.  В результате ошибок мог быть получен неверный ответ. |
| **3 (− .)** | 1. Указан верный ответ, но решение неверное или отсутствует. 2. Приведена верная, но незначительная последовательность шагов решения. |
| **0** | Все случаи решения, которые не соответствуют  вышеуказанным критериям. |

**6.** Найти все значения параметра *a*, при которых все корни уравнения являются целыми числами.

*Решение:*

Пусть *m* и *n* – корни данного уравнения, тогда

.

При этом .

Подставив  в последнее равенство , получим

.

Учитывая, что корни уравнения – целые числа, имеем следующие четыре случая.

1) .

Так как , то .

2) .

В данном случае получаем .

3) .

Так как , то .

2) .

В данном случае получаем .

*Ответ:* 7 или 13.

|  |  |
| --- | --- |
| **Оценка в баллах** | **Критерии оценки задания № 6 (8,9,10 классы)** |
| **15 (+)** | В представленном решении обоснованно получен верный ответ. |
| **12 (+ −)** | Общая идея и способ решения верные.  Не выполнены некоторые незначительные промежуточные этапы решения или не приведены некоторые незначительные обоснования.  При этом получен верный ответ. |
| **9 (+/2)** | 1. Приведена верная последовательность шагов решения. При этом допущены описки и/или ошибки в вычислениях и преобразованиях, в результате которых может быть получен неверный ответ. 2. Общая идея и способ решения верные. Не выполнены ряд промежуточных этапов решения или не приведены некоторые обоснования. При этом получен верный ответ. |
| **6 (− +)** | Общая идея решения верная. Не выполнены некоторые существенные промежуточные этапы решения или не приведены некоторые существенные обоснования или решение не завершено.  В результате ошибок мог быть получен неверный ответ. |
| **3 (− .)** | 1. Указан верный ответ или его часть, но решение неверное или отсутствует. 2. Приведена верная, но незначительная последовательность шагов решения. |
| **0** | Все случаи решения, которые не соответствуют  вышеуказанным критериям. |

**7.** На выставке некоторые участники являются конкурентами друг другу. При этом у каждого участника не более трёх конкурентов. Докажите, что участников выставки можно распределить по двум павильонам так, что у каждого участника в своём павильоне будет не более одного конкурента.

*Решение:*

Построим распределение следующим образом.

Разделим участников сначала произвольным образом.

Если у каждого участника в своём павильоне будет не более одного конкурента, то разбиение получено. В противном случае выберем участника, имеющего не менее двух конкурентов в своём павильоне, и переведём его в другой павильон. После этого общее число пар конкурентов, находящихся в каждом из павильонов, уменьшается.

Данный процесс остановится, т.к. число пар конкурентов конечно. Остановка процесса означает построение нужного разбиения.

|  |  |
| --- | --- |
| **Оценка в баллах** | **Критерии оценки задания № 7 (8,9,10 классы)** |
| **15 (+)** | В представленном решении приведено полное доказательство утверждаемого факта. |
| **12 (+ −)** | Общая идея и способ доказательства верные, но не приведены некоторые незначительные обоснования. |
| **9 (+/2)** | Общая идея и способ доказательства верные, но не приведены некоторые обоснования. |
| **6 (− +)** | Общая идея и способ доказательства верные, но не приведены существенные обоснования. |
| **3 (− .)** | Приведена верная, но незначительная последовательность шагов доказательства. |
| **0 (−)** | Все случаи решения, которые не соответствуют  вышеуказанным критериям. |

**8.** Шесть студентов университета распределяются на стажировку в шесть банков, в каждый банк – по одному студенту. После рассмотрения кандидатур, оказалось, что первый банк готов взять на стажировку студентов Антонова или Борисова; второй банк – Антонова, Борисова или Васильева; третий банк – Борисова, Васильева или Глебова; четвертый – Васильева, Глебова или Денисова; пятый – Глебова, Денисова или Егорова; шестой – Денисова, Егорова. Сколькими способами можно распределить студентов в банки на стажировку?

*Решение:*

***Решение может также быть представлено в виде дерева с непосредственным подсчетом вариантов.*** *Ниже приводится общий случай.*

Матрица соответствия между банками и студентами имеет вид.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | Банк | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Студент | Антонов | + | + | – | – | – | – |
| Борисов | + | + | + | − | – | – |
| Васильев | – | + | + | + | – | – |
| Глебов | – | – | + | + | + | – |
| Денисов | – | – | – | + | + | + |
| Егоров | – | – | – | – | + | + |

Пусть искомое число способов равно .

Если Антонова распределят в первый банк, то для остальных студентов матрица соответствия будет равна

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | Банк | | | | |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Студент | Борисов | + | + | − | – | – |
| Васильев | + | + | + | – | – |
| Глебов | – | + | + | + | – |
| Денисов | – | – | + | + | + |
| Егоров | – | – | – | + | + |

Число способов распределить оставшихся студентов по оставшимся банкам рано .

Если же Антонова распределят во второй банк, то для остальных студентов матрица соответствия будет равна

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | Банк | | | | |
| 1 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Студент | Борисов | + | − | − | – | – |
| Васильев | − | + | + | – | – |
| Глебов | – | + | + | + | – |
| Денисов | – | – | + | + | + |
| Егоров | – | – | – | + | + |

Следовательно, в первый банк должен будет распределен Борисов, а для остальных студентов матрица соответствия будет равна

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | Банк | | | |
| 3 | 4 | 5 | 6 |
| Студент | Васильев | + | + | – | – |
| Глебов | + | + | + | – |
| Денисов | – | + | + | + |
| Егоров | – | – | + | + |

Число способов распределить оставшихся студентов по оставшимся банкам рано .

Таким образом, искомое число способов распределения студентов в банки на стажировку равно

.

Аналогично рассуждая, получаем

, для .

При этом, , а .

Таким образом, искомое число  равно седьмому числу последовательности Фибоначчи, то есть 13. Действительно,

,

,



.

*Ответ:* 13 способов.

|  |  |
| --- | --- |
| **Оценка в баллах** | **Критерии оценки задания № 8 (8, 9, 10 классы)** |
| **15 (+)** | В представленном решении обоснованно получен верный ответ. |
| **12 (+ −)** | Общая идея и способ решения верные.  Не выполнены некоторые незначительные промежуточные этапы решения или не приведены некоторые незначительные обоснования.  При этом получен верный ответ. |
| **9 (+/2)** | 1. Приведена верная последовательность шагов решения. При этом допущены описки и/или ошибки в вычислениях и преобразованиях, в результате которых может быть получен неверный ответ. 2. Общая идея и способ решения верные. Не выполнены ряд промежуточных этапов решения или не приведены некоторые обоснования. При этом получен верный ответ. |
| **6 (− +)** | Общая идея решения верная. Не выполнены некоторые существенные промежуточные этапы решения или не приведены некоторые существенные обоснования или решение не завершено.  В результате ошибок мог быть получен неверный ответ. |
| **3 (− .)** | 1. Указан верный ответ, но решение неверное или отсутствует. 2. Приведена верная, но незначительная последовательность шагов решения. |
| **0** | Все случаи решения, которые не соответствуют  вышеуказанным критериям. |