

Материалы ЛЭШ-2014



Преподаватели:

Данил Фёдоровых, Александр Челеховский, Константин Платонов
Артур Варданян, Дмитрий Ефимов, Егор Иванов,
Надежда Котова, Петр Мартынов, Елизавета Ореханова,
Екатерина Стрельникова, Степан Алексенко

15—25 августа 2014 года, Липецкая область

Содержание

Оптимизация функций без производных. Безусловные экстремумы	2
Оптимизация функций без производных. Условные экстремумы	2
Оптимизация функций без производных. Дискретная оптимизация	3
Производная	3
Неконкурентные рыночные структуры. Монополия	6
Микроэкономика. Общественное благосостояние и влияние государства на рынок	10
Теория игр. Равновесия по Нэшу и оптимальность	13
Неконкурентные рыночные структуры. Олигополии	17
Теория игр. Разные задачи	18
Макроэкономика. Монетарная политика	19
Макроэкономика. Открытая экономика	22
Экономический бой. Правила	25
Экономический бой. Задания	28
Мастер-класс. Кривая предложения фирмы	29
Мастер-класс. КПВ: векторный метод	30
Вступительный тест	33

Некоторые определения в этом тексте заимствованы из книги Е. Б. Бурмистровой и С. Г. Лобанова «Математический анализ для студентов экономического факультета. Часть 1» (НИУ ВШЭ).

Оптимизация функций без производных

Безусловные экстремумы

Здесь и далее задачи с пометкой Υ сдавать на «плюсик» не нужно — подумайте над задачей самостоятельно и обратитесь к преподавателю, если у вас будут проблемы. Задачи с пометкой $\dagger$ — сложные, на их решение, скорее всего, потребуется больше времени, чем обычно. Эти задачи можно пропускать и переходить к следующей задаче без такой отметки. Если какие-то экономические термины в задачах будут вам не знакомы, то попросите преподавателя объяснить их вам.

Определение 1. Функцией $f(x) = y$ называется зависимость переменной y от переменной x , где каждому значению x из области определения соответствует ровно одно значение y . Переменная x называется *аргументом* (независимой переменной) функции $f(x)$, а переменная y — *значением функции* (зависимой переменной). Областью определения функции $f(x)$ называется множество значений, которые может принимать переменная x .

Определение 2. Если в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$, целиком содержащейся в области определения функции f при всех x из этой окрестности:

1. $f(x) \leq f(x_0)$, то x_0 называется *точкой локального максимума* функции f .
2. $f(x) \geq f(x_0)$, то x_0 называется *точкой локального минимума* функции f .

Определение 3. Если для любого x из области определения выполнено:

1. $f(x) \leq f(x_0)$, то x_0 называется *точкой глобального максимума* функции f .
2. $f(x) \geq f(x_0)$, то x_0 называется *точкой глобального минимума* функции f .

Точки максимума или минимума называются *точками экстремума* функции.

Существует множество способов поисков точек экстремума. Например, можно найти вершину параболы, воспользовавшись формулой. Самый универсальный способ для непрерывных функций — производная, однако для решения задач этого раздела ее использовать не нужно.

Теорема 1 (об экстремуме квадратичной функции). Функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ при $a \neq 0$ имеет ровно один экстремум: $x^* = -b/2a$. При этом x^* является точкой максимума при $a < 0$ и точкой минимума при $a > 0$.

Задача 1 (Υ)

Найдите точки глобального максимума и минимума функции $f(x) = 7x^2 + 28x + 12\pi$.

Задача 2 ($\dagger$)

Докажите теорему 1.

Теорема 2 (о монотонном преобразовании). Пусть $g(y)$ — непрерывная монотонно возрастающая функция. Тогда если функция $y = f(x)$ достигает максимума (минимума) в точке x^* , то и функция $g(f(x))$ достигает максимума (минимума) в точке x^* .

Задача 3 ($\dagger$)

Докажите теорему 2.

Для решения следующих задач воспользуйтесь идеей о монотонном преобразовании квадратичной функции. Если, на ваш взгляд, указанное преобразование не является монотонным, то придумайте другой способ решения (пользоваться производной по-прежнему нельзя).

Задача 4

Найдите точки максимума и минимума функции $f(x) = 2(x^2 + 9x + 2)^7 + 100500$

Задача 5

Найдите точки максимума и минимума функции $f(x) = 2(x^2 + 9x + 2)^2 + 100500$

Задача 6

Найдите точки максимума и минимума функции $f(x) = |2x^2 + 2x + 10| - 6$

Задача 7

Найдите точки максимума и минимума функции $f(x) = |2x^2 + 2x - 10| + 2014$

Задача 8

Обратная функция спроса на продукцию фирмы-монополиста линейна, как и функция средних переменных издержек. Известно, что прибыль фирмы^a максимальна только при объеме выпуска, равном 7, а при объеме выпуска, равном 3, она получает нулевую прибыль. Существуют ли другие значения объема выпуска, приносящие нулевую прибыль? Если да, найдите все такие значения.

^aПрибыль фирмы равна $\pi(q) = (p(q) - AVC(q)) \cdot q - F$, где q — объем выпуска, $p(q)$ — обратная функция спроса, $AVC(q)$ — функция средних переменных издержек, а F — некоторая фиксированная величина.

Задача 9 ($\dagger$)

Найдите у функции точки максимума и минимума: $f(x) = |x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 1535|$.

Оптимизация функций без производных

Условные экстремумы

Определение 4. Если x_0 принадлежит множеству, определяемому некоторыми условиями и для любого x из того же множества выполнено:

1. $f(x) \leq f(x_0)$, то x_0 называется *точкой условного максимума* функции f .
2. $f(x) \geq f(x_0)$, то x_0 называется *точкой условного минимума* функции f .

Условный экстремум может как быть, так и не быть безусловным (то же можно сказать и в обратную сторону). Например, при максимизации функции на некотором отрезке решение может лежать как внутри этого отрезка (и тогда искомая точка должна быть локальным максимумом), так и на его концах (и тогда локальный максимум необязателен).

Задача 10

Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = 2x^2 + 2x + 10$ на отрезке $[-5; 0]$.

Задача 11

Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = 2x^2 + 2x + 10$ на отрезке $[-1; 3]$.

Задача 12

Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = |x^2 - 3x + 2|$ на отрезке $[-10; 10]$.

Задача 13

Покажите, что наименьшего значения функции $y = 2x^2 + 2x + 10$ на множестве $(-0,5; 0]$ не существует.

Оптимизация функций без производных

Дискретная оптимизация

Все задачи в этом блоке нужно решать, не прибегая к дифференцированию.

Иногда требуется найти наибольшее или наименьшее значение функции, область определения которых — это не множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$, а множество целых чисел $\mathbb{Z}$ (или — часто в экономике — множества целых неотрицательных чисел $\mathbb{Z}_+$). Например, количество товара, потребляемого потребителем или производимого фирмой, может измеряться только целыми неотрицательными числами.

Чтобы решать такие задачи, можно проигнорировать целочисленность и найти максимум функции так, как будто она определена на $\mathbb{R}$. Если окажется, что нужный экстремум — целый, то больше ничего делать не нужно: ведь если в какой-то точке функция принимает, скажем, наибольшее значение *среди всех чисел*, то она тем более принимает наибольшее значение *среди целых чисел*.

Иногда, однако, это не так: максимальное (минимальное) значение не попадает в нужное множество. Тогда самое большое значение достигается в одной из двух целочисленных точек, соседних с одним из локальных максимумов (минимумов) — не обязательно ближайшего соседа и не обязательно самого высокого (низкого). Иногда полезно помнить, что квадратичные параболы симметричны относительно вертикальной прямой, проведенной через вершину.

Задача 14

Найдите наибольшее значение функции $f(x) = -2x^2 + 20x + 10$ при $x \in \mathbb{Z}$.

Задача 15

Найдите наибольшее значение функции $f(x) = -50250x^2 + 120600x + 112632$ при $x \in \mathbb{Z}$.

Задача 16

Найдите наибольшее значение функции $\pi(p) = (15 - p)(p - 8) - 100500$ при $p \in \mathbb{Z}$.

Задача 17 (†)

Изобразите графически примеры (или докажите, что их нет), в которых глобальный максимум функции на множестве целых чисел $\hat{x}$ не совпадает с глобальным максимумом на множестве действительных чисел x^* , при этом

- $\hat{x}$ является одной из двух ближайших к x^* целочисленных точек, но не ближайшей;
- $\hat{x}$ не является одной из двух ближайших к x^* целочисленных точек.

Задача 18

Найдите наибольшее значение функции $f(x) = -2x^2 + 20x + 10$ при $x \in \mathbb{Z} \cap (5; 10]$.

Иногда полезно думать о *приращении* функции в двух соседних точках. До тех пор, пока оно положительное (то есть n -й член последовательности больше, чем $(n - 1)$ -й), функция возрастает; как только оно становится отрицательным — убывает (значит, при смене знака приращения функция переходит через экстремум).

Задача 19

Найдите номер наибольшего члена последовательности $y_n = n^{10}/2^n$ (можно использовать калькулятор).

Задача 20

Вася устроился на работу с зарплатой 60 000 руб. в месяц, которая выплачивается в конце каждого месяца. Половину своего заработка он откладывает на черный день в ящик стола.

Через сколько месяцев реальная величина^a накоплений Васи, хранящихся в ящике стола, достигнет своего максимума, если уровень инфляции стабилен и составляет 2,5% в месяц?

^aРеальная величина — рассчитанная в сопоставимых ценах, то есть «очищенная» от влияния инфляции и отражающая покупательную способность.

Задача 21 (†)

Марк Цукерберг имеет 10 000 \$ долларов. Каждые пять дней он ездит на вечеринки. Известно, что Марк тратит в четыре раза больше денег на i вечеринке, чем на предыдущей $i - 1$, а также что на первой вечеринке он потратил всего лишь 1\$. Сколько дней нужно, чтобы Марк стал банкротом? Его первая вечеринка была в 1-й день.

Идея взята из Stanford Math Tournament, General Test

Производная

-NoValue-

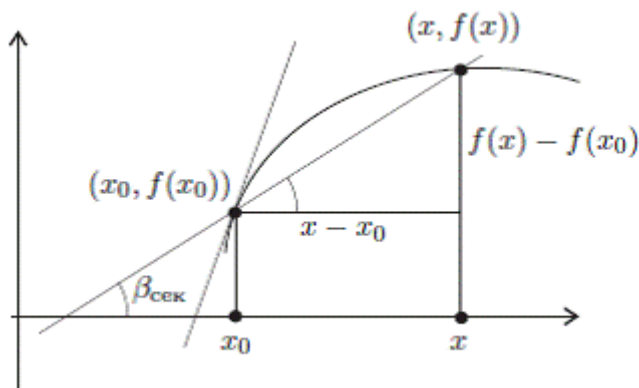
Определение 5. Функция $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *дифференцируемой* в точке $x_0 \in X$ если существует предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

называемый *производной функции* f в точке x_0 и обозначаемый через $f'(x_0)$.

Примечание 2 (о геометрической интерпретации производной). Выражение $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ под знаком предела в определении производной есть тангенс угла, образованного

прямой, проходящей через точки графика функции f с координатами $(x_0, f(x_0))$ и $(x, f(x))$, с положительным направлением оси Ox .



Определение 6. Касательной к графику дифференцируемой в точке x_0 функции f называется прямая, проходящая через точку $(x_0, f(x_0))$ и образующая с положительным направлением оси Ox угол, тангенс которого равен $f'(x_0)$.

Уравнение касательной к графику функции f в точке x_0 может быть представлено в виде

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$

Теорема 3 (Факты о производных). 1. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ (и в частности $\text{const}' = 0$).

2. $g'(f(x)) = g'(f) \cdot f'(x)$ (например, $(2x+2)^2 = 2(2x+2) \cdot 2$).

3. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

4. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

5.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Задача 22

Найдите тангенс угла наклона секущей:

- У функции $y = \sqrt{x}$ в точке $x = 2$ при увеличении x на 1.
- У функции $y = (x-3)(x-5)$ в точке $x = 5$ при увеличении x на 0,5
- У функции $y = x^3 + 5x^2 - 4x - 5$ в точке $x = 4$ при увеличении x на 4

Теорема 4. Если $f'(x_0) > 0$, то x_0 — точка возрастания функции f ; если $f'(x_0) < 0$, то x_0 — точка убывания функции f . В точке локального максимума или минимума производная равна нулю или не существует.

Теорема 5. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) . Тогда если для всех $x \in (a, b)$

- $f'(x) > 0$, то функция f возрастает на отрезке $[a, b]$;
- $f'(x) < 0$, то функция f убывает на отрезке $[a, b]$;
- $f'(x) = 0$, то функция f постоянна на отрезке $[a, b]$.

Нестрогое следствие. Если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с «+» на «-», то x_0 — точка максимума, а если с «-» на «+», то x_0 — точка минимума. Если знак не меняется, то экстремума нет.

Задача 23

Найдите интервалы монотонности и исследуйте на экстремумы функции:

- $y = x^2 + 1$;
- $y = x^3$;
- $y = x^3 + 1$;
- $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$.

Задача 24

Найдите предельные издержки в точке $Q = 7$, если функция издержек имеет вид $TC(Q) = Q^3 + 4Q - 2Q^2 + 1$

Задача 25

Найдите глобальный минимум функции $y = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 5x - 1$ на $[-10; 5] \cup [4; +\infty]$

Задача 26

Функция прибыли задана следующим образом: $\pi = -x^3 + 4x^2 - 5x - 4$. Найдите максимальное значение прибыли.

Задача 27

Решите предыдущую задачу, если известно, что можно произвести не менее одной единицы продукции

Задача 28

Предельная выручка задается функцией $MR = 10 - 2x$, а предельные издержки — $MC = 25 - 10x + x^2$. Особенности производства таковы, что невозможно произвести более десяти единиц продукции. Найдите максимум прибыли.

Задача 29

Функция общих издержек задана $TC(Q) = q^3 - 6q^2 + 10q + 32$.

- Найдите $AC(Q)$, $MC(Q)$, $\min AC(Q)$. Известные Вам кривые нарисуйте.
- Убедитесь, что совпадение $\min AC(Q^*)$ и точки пересечения кривых $AC(Q)$ и $MC(Q)$ не случайно.
- Докажите, что если предельные издержки фирмы возрастают, то в точке минимума средних издержек, если она существует, средние издержки равны предельным.

Задача 30 (+)

Фирма «Шутка», работающая на конкурентном рынке, занимается производством смеха. Фирма обнаружила довольно странную функцию общих издержек, характерных только для производства смеха: $TC(Q) = \sqrt{Q}$, где Q — объем выпуска единиц смеха. Одной произведенной единицы смеха достаточно, чтобы насмешить одного человека. Постоянные издержки производств смеха отсутствуют. Определите уравнение функции предложения фирмы в крат-

краткосрочном периоде $Q_s(P)$, полагая, что по техническим причинам фирма «Шутка» может максимально произвести объем продукции, достаточный, чтобы расселить 100 человек.

Задача 31 (†)

Если на рынке установится цена P , то максимальная прибыль, которую сможет получить совершенно конкурентная фирма «Трюк», будет равна $\pi_{max}(P) = 125P^2 + 2,25P - 2009$.
Определите минимальное значение средних издержек фирмы

Пример 1. Фирма — совершенный конкурент на рынке своего продукта и на рынке труда, максимизирует свою прибыль. Докажите, что выражение $P \cdot MP_L = w$ будет выполняться в точке максимума прибыли, если $VC(Q) = w \cdot L$, $FC \neq 0$, $TP(L) = Q(L)$ (все функции непрерывно дифференцируемы).

Решение.

$$\Pi(Q(L)) = TR(Q(L)) - TC(Q(L)) = P \cdot Q(L) - w \cdot L - FC \rightarrow \max_L \Rightarrow P \cdot MP_L = w$$

Задача 32 (†)

Докажите выражение из примера 1 самостоятельно, если:

- Фирма — совершенный конкурент на рынке своего продукта и монополист на рынке труда;
- Фирма — монополист на рынке своего продукта и монополист на рынке труда;

Задача 33 (†)

Найдите максимум функции $y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2 + 1}$

Задача 34 (†)

Найдите глобальный минимум функции $y = \frac{x^3}{1+x}$ на промежутке $[-\infty; -1)$

Задача 35 (†)

Найдите глобальный максимум функции $-x^2(x-1)^3$ на промежутке $(-\infty; -0,16] \cup [0,3; 0,7]$

Задача 36 (†)

Найдите максимум функции $y = \frac{-x^3 + 5x^2 - 6x - 2}{x+1}$ при $x \leq \frac{5}{2}$

Источник задачи

Задача 37 (†)

Найдите глобальный максимум функции $y = -2x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 8x - 5$

Задача 38 (†)

Решите предыдущий номер, если функция задана на промежутке $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty) \setminus (2; 4)$

Задача 39 (†)

Кривая спроса на монопольном рынке задана функцией $Q = 100/P^2$. Краткосрочные предельные издержки фирмы имеют вид $MC = 10/(Q+1)$. Определить оптимальный объем выпуска. Допустим, открыта новая технология, которая позволяет фирме вдвое увеличить максимальную границу объема выпуска в краткосрочном периоде, но не изменяет функцию издержек.

Всероссийская олимпиада школьников по экономике, 2005 год

Задача 40 (†)

(Условие Куна-Таккера)

- Покажите, что если x^* — точка максимума непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ при условии $x \geq 0$, то в любом случае $f'(x^*) \leq 0$ и $x^* \cdot f'(x^*) = 0$.
- Выведите аналогичное условие, если x^* — точка минимума функции $f(x)$ при условии $x \geq 0$.

Неконкурентные рыночные структуры

Монополия

Задача 1

Обратная функция спроса на продукцию монополии имеет вид $P = a - bQ$, предельные издержки постоянны и равны c . Найдите оптимальный объем выпуска, цену и максимальную прибыль монополиста.

Задача 2

Кривая предельной выручки фирмы-монополиста имеет вид $MR(Q) = 400 - 4Q$. Средние издержки постоянны. В точке оптимума $P = 300$. Чему равно максимальное значение прибыли?

Задача 3

Функция издержек недискриминирующего монополиста имеет вид: $TC = q^2 + 12$, а обратная функция спроса на его продукцию имеет вид: $p = 24 - q$.

а) Найдите функцию предельной выручки монополиста, равновесные цену и выпуск, а также величину прибыли. Проиллюстрируйте графически полученные результаты. Объясните, почему для монополии предельная выручка не совпадает с ценой.

б) Вычислите излишек потребителя, излишек производителя и величину безвозвратных потерь (DWL), связанных с монополизацией отрасли. Проиллюстрируйте графически полученные результаты. Объясните, почему при монополизации отрасли могут возникнуть безвозвратные потери (равновесное распределение неэффективно по Парето).

в) Пусть монополист облагается налогом в размере 8\$ с каждой единицы выпуска. Как введение налога отразится на выпуске монополиста, благосостоянии потребителей и общества в целом? Проиллюстрируйте графически полученные результаты.

г) Пусть теперь монополист облагается пропорциональным налогом на прибыль. Как введение налога скажется на выпуске монополиста, благосостоянии потребителей и общества в целом?

Задача 4

Спрос на продукцию монополии задан как $p = a - Q$. Издержки производства на единицу продукции этой монополии равны c , $c > 0$. Правительство ввело потоварный налог по ставке t . На какую величину изменится объем выпуска и цена при введении потоварного налога?

Задача 5

Монополист владеет двумя заводами, расположенными в разных городах. Издержки производства на этих предприятиях представимы функциями $TC_1(q_1) = 5q_1 + 0,5q_1^2$ и $TC_2(q_2) = 2q_2 + q_2^2$, где q_1 — выпуск, производимый на первом заводе, а q_2 — выпуск, производимый на втором заводе. Обратная функция спроса на продукцию монополиста имеет вид $P = 18 - 2Q$, где Q — совокупный объем потребления товара, производимого монополией.

а) Найдите равновесие и проиллюстрируйте его графически.

б) В первом городе была повышена ставка заработной платы, в результате чего издержки производства на первом заводе теперь имеют вид $TC_1(q_1) = 6q_1 + q_1^2$. Стоит ли монополисту закрыть первый завод, производя весь объем продукции на втором заводе?

Задача 6

В темно-синем лесу, где трепещут осины, компания «Зайцы Ltd.» является монополистом на рынке трын-травы и имеет функцию издержек $TC(Q) = Q^3 - 10Q^2 + 50Q$. Ежемесячно проводятся торги, каждый месяц функция спроса на трын-траву одинакова и задается уравнением $P = 98 - 10Q^d$. Дед Мазай, представляющий в лесу государство, собирается вмешаться в ценообразование. Он хочет добиться снижения цены до определенного уровня P_0 , но, чтобы вмешательство не казалось резким, Мазай будет проводить свою политику в три этапа: каждый месяц, когда происходят торги, Мазай вмешивается в рыночное ценообразование (на каждом этапе торговли функция спроса не меняется и соответствует первоначальной):

1) Установит потолок цены на уровне P_1 , который выше P_0 , но при котором «Зайцы Ltd.» будут производить столько же, сколько производили бы при P_0 .

2) Снизит потолок до такого уровня P_2 , при котором оптимальный выпуск «Зайцев Ltd.» максимален.

3) Наконец, снизит потолок до уровня P_0 .

Когда Дед Мазай спросил «Зайцев Ltd.», выгодно ли им косить трын-траву при цене P_0 или лучше уйти с рынка, они ответили: «А нам всё равно!».

а) Какую прибыль получили бы «Зайцы Ltd.», если бы не было Деда Мазая?

б) Найдите цены, которые установятся на рынке после каждого этапа вмешательства. Какую прибыль будут получать «Зайцы Ltd.» при каждой из этих цен?

в) Прокомментируйте действия Деда Мазая с точки зрения общественного благосостояния.

Всероссийская олимпиада — 2009

Задача 7

На отечественном рынке импортируемых автомобилей класса «люкс» с обратной функцией спроса $P = 100 - 2Q$ работает иностранный монополист с общими издержками $TC = 20Q$. Правительство планирует ввести налог t с единицы продаж. Правительство заинтересовано в налоговых сборах. Какова должна быть величина t , чтобы максимизировать сумму налоговых сборов?

«Высшая проба» — 2014, 9-й класс

Задача 8

Функция рыночного спроса на патефоны в мире линейна и неизменна на протяжении многих лет. Функция издержек фирмы «Патефан» — монополиста на этом рынке, — имеет вид $TC(Q) = Q^2$. В «Патефане» нет грамотных экономистов, поэтому фирма пытается максимизировать прибыль, выбирая оптимальный выпуск методом проб и ошибок. Выпустив 3 тыс. патефонов в 2010 году, «Патефан» получил прибыль, равную 6. Выпустив 2 тыс. патефонов в 2011 году, «Патефан» получил прибыль, равную 8.

Подскажите «Патефану» оптимальный объем выпуска в 2012 году.

Высшая проба — 2012

Задача 9. Сговор и потолок ($\dagger$)

(20 баллов баллов)

На рынке действуют несколько фирм. Антимонопольная служба хотела бы определить, есть ли между этими фирмами монопольный сговор. Проблема заключается в том, что службе неизвестны точная функция спроса на данном рынке и функции издержек фирм,

ей известны лишь значения рыночной цены и рыночного объема продаж в каждый момент времени.

Приглашенный консультант (которому известно не больше) посоветовал службе хитрый ход — ввести потолок цены и посмотреть, как отреагирует рынок. «В ряде случаев, — заявил консультант, — по изменению рыночной цены и объема продаж я смогу точно определить, есть ли на рынке сговор».

Когда потолок цены был введен, консультант смог точно определить, есть ли на рынке сговор. Есть ли на рынке сговор?

Примечание: для простоты будем считать, что при сговоре картель фирм ведет себя как монополист, а в отсутствие сговора поведение фирм совершенно-конкурентное.

Московская олимпиада — 2014

Задача 10 (†)

Фирма Ф, расположенная на территории страны Р, является монопольным производителем товара Т в этой стране. Национальная валюта страны Р называется рубль. Для производства продукции фирма Ф нуждается в сырье, которое она закупает за границей. Для производства одного килограмма товара Т необходимо закупить сырья на сумму 5 долларов. Остальные издержки представляют собой расходы на оплату отечественных факторов производства; эти расходы описываются уравнением $C = 5q^2$, где q — количество продаваемого товара (в кг), а C — расходы (в рублях). Обратная функция спроса на товар Т на внутреннем рынке страны Р имеет вид $p = 90 - 5q$. Иностранные потребители готовы купить любое количество продукции фирмы по цене, не превышающей 10 долларов за кг.

а) Обозначим за e обменный курс рубля (количество рублей за один доллар). Для каждого положительного значения обменного курса e определите оптимальный выпуск товара Т фирмой Ф. На графике в координатах $(e; q)$ изобразите зависимость оптимального выпуска фирмы от обменного курса рубля.

б) Предложите содержательное экономическое объяснение вида этой зависимости.

Всероссийская олимпиада — 2012

Задача 11. Евросок

На совершенно конкурентном рынке соков функция спроса имеет вид $Q_d = 50 - P$, а функция предложения имеет вид $Q_s = -10 + P$, где Q — выпуск в тысячах пакетов сока в месяц. Изначально рынок находится в ситуации совершенной конкуренции. Компания «Евросок» предлагает правительству передать ей лицензию, обеспечивающую монопольное право на производство соков, и гарантирует, что в таком случае монопольное положение поможет ей производить сок с издержками $TC = 8Q + F$, где F — стоимость лицензии. В случае отказа правительства «Евросок» не будет входить на рынок.

а) Предположим, что правительство при принятии своих решений учитывает только благосостояние потребителей сока, при этом потребители не получают ничего из того, что «Евросок» заплатит за лицензию. Согласится ли правительство на предложение «Евросока»?

б) Какую максимальную сумму готов заплатить «Евросок» за возможность войти на рынок?

Московская олимпиада — 2014

Задача 12 (†)

На рынке присутствует 1000 покупателей, для удобства дальнейших рассуждений, пронумерованных индексами $i = 1, 2, 3, \dots, 1000$. Функция спроса i -го покупателя имеет вид: $q_i = 1001 - i - P$. Причем, значения цены могут быть только целыми. Производит и продает товар фирма-монополист, функция общих издержек которого имеет вид $= 100,5Q$. Сколько единиц товара и по какой цене продаст монополист, не имеющий возможности осуществлять ценовую дискриминацию? Какую прибыль он получит?

Задача 13

Монополист, использующий технологию с функцией издержек $TC(Q) = 31/48Q^2$, может осуществлять продажи своего товара в двух регионах, ценовая дискриминация между которыми запрещена. Обратные функции спроса на товар монополии в одном регионе имеет вид $p_1 = 10 - q_1$, а в другом $p_2 = 13 - 0,5q_2$.

а) Найдите равновесие и проиллюстрируйте его графически. Будет ли монополист осуществлять продажи своего товара, в обоих регионах?

б) Найдите безвозвратные потери общества и проиллюстрируйте их графически.

в) Пусть теперь монополист может назначать различную цену своего товара для двух регионов, и перепродажи между регионами невозможны. Найдите равновесие и проиллюстрируйте решение графически.

г) Как изменится благосостояние потребителей, прибыль монополии и совокупное благосостояние общества при возможности дискриминации по сравнению с равновесием на рынке монопольного товара в отсутствии дискриминации? Прокомментируйте полученный результат.

Задача 14

Дискриминирующая монополия продает свой товар в городах А и В, между которыми нет пассажирского сообщения. Кривая спроса в городе А задается формулой $p_A = 100 - q_A/2$. Кривая спроса в городе В задается формулой $p_B = 100 - q_B$. Обозначим агрегированный объем производства монополии как Q , то есть $Q = q_A + q_B$. Весь объем товара производится на одном заводе. Функция издержек монополии зависит от общего объема производства: $TC(Q) = Q^2$.

а) Найдите равновесие и прибыль монополиста.

б) Представим, что между городами появился пассажирский транспорт, который может без всяких издержек перевозить жителей из А в В и обратно. Найдите равновесие в этом случае.

в) Представим теперь, что пассажирский транспорт между городами исчез обратно, а контроль над монополией получил новый СЕО, который решил разделить ее завод на два завода, один из которых будет производить продукцию для продажи только на первом рынке, а второй — только на втором рынке. Известно, что функция издержек на каждом заводе будет иметь тот же вид, что и прежде. Найдите равновесие и прибыль монополиста.

г) Предположим, что у нового СЕО есть волшебная палочка, которая позволяет бесплатно разделить существующие заводы на любое количество новых заводов с той же функцией издержек. Каково оптимальное количество заводов в этом случае? Что нереалистичного в этой модели (кроме волшебной палочки, разумеется).

Задача 15

У монополиста, максимизирующего прибыль, есть возможность построить n заводов по цене 150 за каждый. Спрос на его продукцию равен $Q_d(P) = 100 - P$, а издержки на производство продукции на каждом из заводов равны $TC(q) = q^2$. Сколько заводов ему стоит построить?

Задача 16

На рынке товара G действует только одна фирма, обладающая патентом на его производство. Известно, что имеется n_H потребителей с высоким доходом, каждый из которых готов купить единицу товара по максимальной цене V_H долларов, и n_L потребителей с низким доходом, которые готовы купить товар по максимальной цене V_L долларов за единицу. Пусть $V_H > V_L > 0$, каждый покупатель ни за какие деньги не согласен купить вторую единицу товара. Предположим, что монополист не может различать потребителей с низким и высоким доходом.

- Изобразите графически кривую рыночного спроса, с которым сталкивается в этом случае монополия.
- Найдите монопольную цену при различных значениях n_H , V_H , n_L и V_L .
- Предположим, что монополист может устроить распродажу: сначала назначить на свой товар одну цену, а потом, когда все желающие купят товар, неожиданно ее изменить. Какую максимальную прибыль он может получить тогда?

Задача 17

Спрос отечественных потребителей на продукцию монополиста имеет вид $q = 20 - p$, предельные издержки постоянны и равны 2, при этом особенности технологии не позволяют произвести более 20 единиц продукции. Монополист может продать любое количество товара на мировом рынке по цене 3, а цену внутреннего рынка выбирает сам.

- Сравните равновесие, которое возникает в такой ситуации, с равновесием в отсутствие внешнего рынка. В какую сторону меняется благосостояние потребителей с открытием международной торговли?
- Предположим, что перевозка товара за границу стоит 0,5 д. е. за штуку (можно думать об этом как об экспортной пошлине, введенной государством). Как это повлияет на объем экспорта, внутреннюю цену, прибыль монополиста?

Задача 18 (†)

Фирма «Машино счастье» является монополистом на рынке пирожков с малиной. Спрос на ее продукцию предъявляют 2 группы потребителей: бурые медведи и белые медведи. Спрос белых мишек на пирожки задается функцией $Q_w = 160 - P_w$, а спрос бурых мишек задается функцией $Q_b = 150 - P_b$. Издержки фирмы на производство пирожков задаются функцией $TC = 4(Q_w + Q_b)$.

- Если фирма не может осуществлять ценовую дискриминацию (то есть она должна установить единую цену на свою продукцию для обеих групп потребителей), какую цену она установит на пирожки? Какую прибыль она получит?
- Пусть теперь фирма может устанавливать разные цены для бурых медведей и для белых, какие цены она установит? Какую прибыль она получит?
- Предположим теперь, что «Машино счастье» может не только устанавливать разные цены для разных групп потребителей, но и устанавливать на каждый из пирожков свою цену. Сколько пирожков продаст фирма, а так же какую прибыль она получит?

г) Пусть на рынке пирожков с малиной появляется еще одна фирма «Бабушкина любовь», издержки которой на производство пирожков задаются той же функцией, что и издержки «Машиного счастья». Известно, что как белые, так и бурые мишки одинаково ценят пирожки и «Машиного счастья», и «Бабушкиной любви», и всегда покупают те пирожки, которые дешевле. Какая цена установится на рынке пирожков с малиной? Какую прибыль получат фирмы?

д) Как поменяется Ваш ответ на предыдущий пункт, если издержки «Бабушкиной любви» на приготовление пирожков с малиной понизятся и станут $TC = 3(Q_w + Q_b)$.

е) Пусть «Машино счастье» и «Бабушкина любовь» решили объединиться и договориться о цене на свою продукцию. Какую цену они установят? Какую прибыль получат?

Задача 19

В темно-синем лесу, где трепещут осины, компания «Зайцы, Ltd.» является монополистом на рынке трын-травы и имеет функцию издержек вида $TC(q) = q^2/2$. Спрос на трын-траву задан уравнением $q = 120 - p$.

а) Найдите цену, которую назначит монополист, если рынок трын-травы на болоте, где живут зайцы, закрыт от внешних покупателей и продавцов.

б) В результате вступления болота в ВТО оно стало малой открытой экономикой, то есть агенты, действующие на рынке травы, теперь могут покупать и продавать ее в любом количестве по мировой цене $P_w = 80$. Будет ли болото импортировать или экспортировать трын-траву? Объясните свой ответ.

в) Как изменится ваш ответ на предыдущий пункт, если $P_w = 65$? Выиграют или проиграют в этом случае от вступления в ВТО отечественные (живущие на болоте) потребители? Объясните свои ответы.

«Сибиряда. Шаг в мечту» — 2013

Задача 20

Сайт по продаже авиабилетов GetGoing.com предлагает своим клиентам необычную услугу «Pick Two, Get One™». Клиент выбирает два места, которые он хотел бы посетить в рамках своего бюджета (например, Сидней и Мельбурн) и вводит данные кредитной карты. Затем сайт случайным образом выбирает одно из указанных мест назначения и бронирует для клиента билет в это место, списывая деньги с карты; отменить бронирование невозможно. Покупая билет по этой схеме, можно сэкономить до 40 % от его обычной стоимости.

Объясните, как существование такого сайта помогает авиакомпаниям максимизировать прибыль.

Задача 21

Монополист производит дискретный товар с постоянными предельными издержками, равными 3. Цены, которые потребители готовы заплатить за каждую единицу товара, представлены в таблице:

Количество	Резервная цена	
	Потребитель А	Потребитель В
1	12	5
2	5	4
3	4	2
4	2	0
5	0	0

Считая, что в экономике только один потребитель типа А и один потребитель типа В, ответьте на следующие вопросы:

- Какую цену назначит монополист, если он не может дискриминировать? Какую прибыль он получит?
- Какую цену назначит монополист, если он будет производить дискриминацию 3-го типа? Какую прибыль он получит?
- Предполагая, что монополист может использовать совершенную дискриминацию 1-го типа, найдите цены для каждой продаваемой единицы, выпуск и прибыль монополиста.
- Сравните прибыль в пунктах а), б), в) и объясните полученный результат.

Задача 22 (†)

Монополист разработал и успешно реализовал план продажи ограниченной партии нового товара. Сначала он провел масштабную рекламную кампанию, изучил спрос на товар и вывел функцию спроса, которая по его оценкам имела вид $Q = 220 - 2P$, где Q — количество товара в условных единицах, а P — цена условной единицы товара, в денежных единицах. Он также убедился в том, что спрос на товар устойчив и не изменится в течение месяца.

Потом монополист объявил, что продавать товар он будет по фиксированной цене и только один месяц. Однако после того как в течение 15 дней все, кто готов был купить товар по названной цене, приобрели его, он объявил о новой сниженной цене и так распродал все остатки товара.

Определите, по каким ценам продавал и какую прибыль в итоге получил хитрый монополист, если известно, что его затраты на рекламу составили 80, а на производство продукта Q^2 ден. ед. Можно ли охарактеризовать его поведение как ценовую дискриминацию?

«Сибиряда. Шаг в мечту», 2010. Людмила Веселая

Задача 23

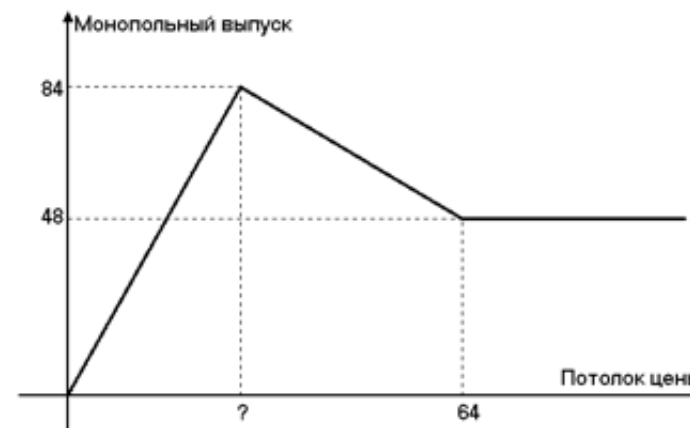
В странах А и В, составляющих мировую экономику, могут производиться только два товара (Х и Y). Эти товары потребляются в комплектах: на единицу Х всегда нужна единица Y, по отдельности товары бесполезны. В стране А альтернативная стоимость единицы Х всегда равна 20 единицам Y, а в стране В альтернативная стоимость единицы Y всегда равна 0,2 единицам Х. Страна А может произвести не более 420 единиц Y, а страна В — не более 42 единиц Х. Страна А является монополистом: она предлагает стране В цену единицы товара Х (в единицах Y, цена должна быть целым числом), по которой она готова его покупать или продавать, а потом страна В по этой цене продает стране А или покупает у нее столько товара Х, сколько хочет. При этом сделка происходит, если каждая из стран оказывается в выигрыше, то есть может потратить больше комплектов из единицы Х и единицы Y, чем без сделки.

- Найдите количество потребленных комплектов в каждой стране, если бы каждая страна функционировала в режиме закрытой экономики.
- Найдите функцию предложения страны В, то есть зависимость количества товара, который она в равновесии будет продавать, от цены, предложенной страной А. Приведите содержательное экономическое объяснение вида этой зависимости.
- Какую цену за единицу Х назначит страна А? Сколько комплектов потребуют жители каждой из стран в результате торговли?

Всероссийская олимпиада школьников по экономике — 2013 (заключительный этап)

Задача 24 (†)

Государство решило регулировать компанию «Ресурсное проклятье», являющуюся монополистом на рынке слитков золота, с помощью установления потолка цены на ее продукцию. Для оценки эффекта от предлагаемой меры экономисты определили, какое количество золота будет выгодно выпустить монополисту при каждом значении потолка цены, и нанесли эту информацию на график:



Было решено установить потолок цены на уровне, при котором выпуск фирмы максимален, однако, к несчастью, обнаружилось, что информация о нем была стерта кем-то с графика...

Тем не менее, нужный потолок цены установить удалось. *Повторив интеллектуальный подвиг экономистов, восстановите значение этого потолка цены по имеющимся данным.*

Примечание: данный рисунок не обязательно сделан в нужном масштабе; линейкой пользоваться нельзя.

Микроэкономика

Общественное благосостояние и влияние государства на рынок

Задача 1

Спрос и предложение на рынке бензина в городе N задаются линейными функциями. Этот рынок первоначально находился в состоянии конкурентного равновесия. Городские власти приняли решение субсидировать цены на бензин: субсидия была установлена в размере 10 рублей на литр бензина. В результате субсидирования установилось новое конкурентное равновесие. По сравнению с первоначальным равновесием, цена, которую покупатель платит за литр бензина, сократилась с 36 до 32 рублей, а общий рыночный объем продаж бензина вырос с 7 тысяч литров до 9 тысяч литров.

а) На какую величину увеличился излишек потребителей в результате введения субсидии? На какую величину увеличился излишек производителей в результате введения субсидии? Кто получил больший выигрыш от субсидирования – потребители или производители?

б) Какая величина больше: суммарное изменение излишков производителей и потребителей от субсидирования или расходы властей на субсидирование?

Источник – олимпиада ВШЭ, 2010 год

Задача 2

Страна Кофемания является экспортёром на рынке кофе. Отечественный и мировой рынок кофе совершенно конкурентны, т.е. внутренние производители воспринимают свою и мировую цену кофе как заданную. Покажите графически, как в случае введения потоварной субсидии отечественным производителям кофе на каждую экспортируемую единицу товара, изменятся:

- а) излишек потребителя;
- б) излишек производителя;
- в) расходы государства;
- г) общественное благосостояние.

При решении считайте, что изменения, вызванные субсидией экспортёрам, не влияют на цену кофе.

Задача 3

Фирма-монополист с функцией издержек $TC = 0,5Q^2 + 10Q + 20$ продаёт товар на рынке, спрос на котором задаётся функцией $Q^d = 100 - p$. Определите потолок цены, который должно установить государство для максимизации:

- а) общественного благосостояния;
- б) излишка потребителей.

Задача 4

На внутреннем рынке чая спрос и предложение задаются следующими функциями: $Q^d = a - bP$, $Q^s = c + dP$. Иностранные производители готовы поставлять чай в страну в любом объёме по цене не ниже P_f . Известно, что если бы рынок чая в данной стране был закрыт для торговли, то внутренняя равновесная цена оказалась бы больше P_f . Государство вводит потоварный налог на ввоз чая. Считая, что введение потоварного налога на ввоз чая не влияет на его мировую цену, определите:

- а) аналитический вид зависимости суммы налоговых сборов, полученных государством, от налоговой ставки;
- б) какой следует государству установить потоварный налог для максимизации налоговых сборов?

Задача 5

На совершенно конкурентном рынке некоторого товара государство ввело пол цен на уровне выше равновесной цены и выкупило возникший избыток товара у производителей по цене, равной установленному полу цены. Покажите, как данная мера повлияет на:

- а) излишек потребителя;
- б) излишек производителя;
- в) расходы государства;
- г) общественное благосостояние.

Задача 6

Докажите следующее утверждение: “если кривые спроса и предложения на совершенно конкурентном рынке некоторого товара линейны, то при введении такого потоварного налога, при котором товар по-прежнему будет продаваться на рынке, излишек потребителей и производителей сокращаются на одинаковое число процентов, тогда как общественное благосостояние сокращается на меньшее число процентов”.

Задача 7

На совершенно конкурентном рынке некоторого товара спрос предъявляют группы потребителей, спрос которых задаётся как $Q_1^d = 50 - 2P$, $Q_2^d = 20 - p$. Предложение предъявляют 2 группы производителей, функции предложения которых задаются как $Q_1^s = 2P - 10$, $Q_2^s = 4P - 10$. Определите ставку потоварного налога на производителей, при которой равновесный излишек потребителей сократится в 11 раз.

Задача 8

В стране Альфа применяется следующая система взимания подоходного налога:

- первые 10 тыс. тугриков ежегодного дохода облагаются налогом по ставке 10%;
- при годовом доходе от 10 тыс. до 20 тыс. тугриков первые 10 тыс. облагаются налогом по ставке 10%, а часть дохода, превышающая 10 тыс. тугриков, облагается налогом со ставкой 20%;
- для всех доходов свыше 20 тыс. тугриков ставка налога составляет 25%, т.е. индивид уплачивает ту сумму, которая соответствует ежегодному доходу в 20 тыс. тугриков плюс 25% с суммы, превышающей 20 тыс.

Сначала все доходы гражданина Фукса облагались по минимальной ставке. После того, как доходы гражданина Фукса возросли на 150%, сумма уплачиваемого им подоходного налога увеличилась в три раза.

- а) запишите аналитически и изобразите графически зависимость налоговых сборов, предельной и средней налоговых ставок от величины дохода в этой стране;
- б) на сколько тугриков возросли доходы гражданина Фукса, если, известно, что он является честным налогоплательщиком?

Задача 9

Рынок виджетов совершенно-конкурентен. Государство хотело бы ввести на данном рынке потоварный налог, причем так, чтобы сумма налоговых сборов была максимальна. Проблема заключается в том, что оно не знает точно, какой вид имеют постоянно меняющиеся функции спроса и предложения виджетов. Оно обладает лишь информацией о том, что эти функции линейны; кроме того, в каждый момент времени оно может наблюдать равновесный объем и равновесную цену виджетов. Изначально наблюдаемые цена и количество равны 100. Исходя из этого и прошлых наблюдений, статистический отдел оценил функции спроса и предложения как $Q^d = 200 - P$ и $Q^s = P$ соответственно.

Эти уравнения были затем использованы для определения ставки потоварного налога t^* , при которой сумма налоговых поступлений (для этих предполагаемых функций) максимальна.

Когда налог по ставке t^* был введен, оказалось, что цена, уплачиваемая потребителем, выросла до 125, а равновесное количество сократилось до 40.

- а) Найдите t^* и полученную государством сумму налоговых поступлений.
- б) Определите, какими уравнениями в действительности описываются спрос и предложение на рынке виджетов (в ответе запишите зависимости количества от цены, а не наоборот).
- в) Является ли полученная государством сумма налоговых поступлений действительно максимальной? Если нет, то найдите максимально возможную сумму налоговых поступлений. (Решение и ответ можно записать в виде обыкновенных дробей).

Источник – муниципальный этап всероссийской олимпиады в г.Москва, 2012 год

Задача 10

На совершенно конкурентном рынке некоторого товара спрос и предложение линейны. Определите, на сколько процентов сократится излишек потребителей при введении ставки потоварного налога, максимизирующей налоговые поступления.

Задача 11

В экономике страны N два товара, X и Y, производятся лишь одной компанией. Эти товары приобретают лишь три потребителя (A, B и C), причем каждый из них желает приобрести не более единицы каждого их товаров. В таблице представлены денежные оценки единицы каждого товара для каждого участника.

Потребители	Оценка единицы товара X	Оценка единицы товара Y
A	5	0
B	0	5
C	3	3

- а) Производитель товаров может выбрать одну из следующих схем:

- продажа каждого товара по отдельности,
- продажа товаров в наборе (оценка набора соответствует сумме оценок товаров, входящих в набор).

Найдите оптимальные цены для каждой схемы, если монополист стремится максимизировать свою выручку. Посоветуйте монополисту, какую из двух схем ему следует выбрать.

в) Условия изменились и теперь монополисту разрешили использовать обе схемы одновременно, то есть он может продавать товары как в наборе, так и по отдельности. Какие цены следует установить монополисту, чтобы получить максимальную выручку?

г) Сравните выручку монополиста, полученную в случае (б) с выручкой, полученной при реализации наилучшей схемы из пункта (а). Всегда ли для трех потребителей, из которых хотя бы один агент будет иметь оценки товаров, отличные от остальных, будет иметь место такое же соотношение выручки для пунктов (а) и (б), как и в данном примере?

Источник – всероссийская олимпиада, 2010 год

Задача 12 (†)

Компания «Зайцы Ltd» является монополистом в лесу на рынке трын-травы и продаёт данный товар по цене P_1 . Мудрый царь зверей лев для борьбы с потерями общественного благосостояния ввёл следующую схему: если «Зайцы Ltd» станет продавать товар по цене ниже P_1 , то лев будет выплачивать компании субсидию в размере $(P_1 - P_2)Q_2$, где P_2 , Q_2 — новая цена и новый объём продаж монополиста. Если же «Зайцы Ltd» поднимет цену на трын-траву, то субсидия выплачиваться не будет. Покажите, как такая мера повлияет на:

- а) излишек потребителя;
- б) излишек производителя;
- в) расходы государства в лице льва;
- г) общественное благосостояние.

Может ли данная мера привести к потерям общественного благосостояния? При решении считайте, что предельные издержки компании «Зайцы Ltd» линейны и строго возрастают при любом объёме продаж, а спрос линеен.

Задача 13 (†)

Продавать продукцию на рынке товара альфа могут только две группы производителей, функции предложения которых имеют вид: $q_1^s = 10p - 10$ и $q_2^s = 10p - 40$. Покупать этот товар могут только две группы потребителей, функции спроса которых имеют вид: $q_1^d = 110 - 5p$ и $q_2^d = 130 - 15p$, где p — цена товара, евро за килограмм, q — количество товара, кг. Правительство вводит налог с производителей в виде фиксированной суммы, за каждый килограмм проданного товара. Выпишите аналитический вид зависимости суммы налоговых поступлений от ставки налога, постройте ее график. Определите ставку налога, при которой поступления в государственный бюджет в результате его введения будут максимальными, а также рассчитайте максимальную сумму этих поступлений.

Источник — всероссийская олимпиада, 2008 год

Задача 14 (†)

Максимизирующая прибыль авиакомпания обладает монопольным правом на авиаперевозки в определенном направлении и имеет дело с потенциальными потребителями двух типов: бизнесменами и туристами. В рамках маркетингового исследования авиакомпания установила, что бизнесменов среди ее потенциальных клиентов столько же, сколько и туристов и что бизнесмены будут пользоваться ее услугами, если билет стоит не более \$700, а туристы — если билет стоит не более \$300. Предположим, что издержки перевозки одного пассажира не зависят от количества пассажиров и равны \$100.

а) Пусть авиакомпания вынуждена назначать единую цену за авиабилет (будучи, например, неспособной различать бизнесменов и туристов). Какую цену за авиабилет установит тогда авиакомпания?

б) Служба маркетинга авиакомпании предложила в дополнении к обычным билетам (с открытой датой вылета) продавать также билеты с фиксированной датой вылета. Билеты с фиксированной датой вылета, по вполне понятным причинам, и бизнесмены, и туристы оценивают ниже, чем билеты с открытой датой. Так, бизнесмены готовы покупать билет с фиксированной датой, если он стоит не выше, чем \$250, а туристы — если он стоит не выше чем \$200. При этом издержки перевозки одного пассажира для авиакомпании равны \$100 вне зависимости от типа билета. Служба маркетинга тем не менее предлагает продавать оба типа билетов по разным ценам, но каждый пассажир будет выбирать тот тип билета, который для него более выгоден. Пусть p_A — цена билета с открытой датой вылета, p_B — цена билета с фиксированной датой вылета. Найдите p_A и p_B , при которых прибыль авиакомпании будет максимальной. Согласится ли менеджмент авиакомпании принять предложение маркетинговой службы?

в) Выиграют ли потенциальные пассажиры от запрета дискриминации (запрета продавать билеты с фиксированной и открытой датой вылета по разным ценам)?

г) Предположим, что потенциальными пользователями услуг авиакомпании являются n категорий пассажиров равной численности, причем каждый пассажир категории i ($i = 1, 2, \dots, n$) готов заплатить за авиабилет (с открытой датой) не более чем $\$300 + 20(i - 1)$. Каждый пассажир знает свою категорию (т.е. готовность заплатить), а авиакомпания обладает лишь совокупной информацией о категориях клиентов и численности каждой категории, но не умеет различать клиентов из разных категорий. Считайте, что авиакомпания продает только билеты с открытой датой. Какую цену за билет установит авиакомпания?

Источник — всероссийская олимпиада, 2010 год

Теория игр

Равновесия по Нэшу и оптимальность

Определение 7. *Стратегия* — описание действий игрока во всех возможных игровых ситуациях.

Определение 8. *Равновесием по Нэшу (Nash Equilibrium, NE)* называется такая комбинация стратегий участников, что никто из них не может улучшить свое положение, при условии, что остальные не меняют своих стратегий.

Определение 9. *Равновесием по Нэшу, совершенным в подыгры (Subgame Perfect Nash Equilibrium, SPNE)* называется такое равновесие по Нэшу, где стратегии участников являются также равновесными при сужении на любую подыгру (в том числе не реализующуюся в равновесии). Во многих случаях SPNE можно найти с помощью обратной индукции.

Определение 10. *Оптимум по Парето* — такой исход игры, при котором невозможно, оставаясь в рамках допустимых исходов, улучшить положение кого-то из игроков, не ухудшая положения остальных.

Задача 1

Два человека встречаются и обмениваются закрытыми сумками. Каждый игрок может положить в сумку то, о чём договорились, либо обмануть партнёра, дав пустую сумку. Если игрок получает непустую сумку, то он получает полезность 10, если отдаёт непустую — полезность —5. Пустая сумка приносит полезность 0. Найдите равновесие (равновесия) Нэша в этой игре. Является ли оно эффективным по Парето.

Задача 2

В городе М. два спортивных телевизионных канала, каждый из которых решает, что показывать вечером субботы: финальный матч Лиги Чемпионов или финальный матч Кубка Хайнекен по регби. 70 % телеаудитории в городе хотят смотреть футбол и только футбол, а 30 % — регби и только регби. Если каналы показывают одно и то же, то аудитория соответствующей игры делится между ними ровно пополам, а остальная аудитория включает телевизоры. Что будут показывать каналы в равновесии по Нэшу (в одновременной игре), если они максимизируют количество зрителей? Является ли это равновесие эффективным?

Задача 3

У вас с напарником есть шанс получить 40 HSE. Каждый из вас может написать на бумажке любое число, и если сумма чисел окажется не больше 40, то каждый получит то, что попросил. Если сумма окажется больше 40, никто не получит ничего. Найдите равновесие по Нэшу. Является ли оно эффективным?

Задача 4 (†)

На выборах президента страны X соревнуются два кандидата. Главный вопрос, который стоит на повестке дня предвыборной кампании — сколько воздушных шариков развесить на главной площади столицы ко Дню независимости страны X. Вечером накануне выборов

кандидатам предстоит участвовать в теледебатах, на которых каждый из них должен будет окончательно объявить, сколько шариков он повесит на площади, если станет президентом.

У каждого гражданина страны есть свое любимое число, и если какой-то из кандидатов предложит именно это число шариков, то избиратель проголосует за него (если любимое число будет предложено обоими кандидатами, гражданин сделает выбор, подбрасывая монетку). Если же любимого избирателем числа не будет среди предложенных вариантов, то он проголосует за того кандидата, который предложит число ближе к его любимому (если разница предложений с любимым числом будет одинаковой, то он тоже подбросит монетку). Самое распространенное любимое число — 50 шариков, его любят 51 человек. 49 и 51 шарик любят по 50 человек, 48 и 52 шарика — по 49 человек, ..., 0 и 100 шариков — по 1 человеку. Это распределение любимых чисел известно кандидатам.

Чем закончатся дебаты, если оба кандидата стремятся выиграть выборы?

Сибиряда, 2013

Задача 5 (†)

Найдите равновесие по Нэшу в игре, где N участников независимо называют целые числа от 1 до 100, а затем те из них, чьи числа оказались ближе всего к $1/3$ от среднего всех названных чисел, получают приз.

Задача 6 (†)

Вася и Петя должны загадать число в диапазоне от 20 до 50, включая концы. После этого выбирается X — минимум из двух загаданных чисел, и выдаются следующие платежи: загадавший большее число получит $X - 5$, загадавший меньшее получит $X + 5$. Если числа одинаковы, то каждый получит своё число. Найдите NE в такой игре.

Задача 7. Рациональные пингвины (†)

Пингвины живут стаями; основное место их обитания — суша, но питаются они рыбой, за которой им время от времени приходится нырять в море. К несчастью для них, в море есть не только рыба, которой они питаются, но и косатки^a, которые питаются как рыбой, так и пингвинами. Косатки в поисках рыбы покрупнее далеко отплывают от берега, так что во многих случаях пингвинам удастся поохотиться, не сталкиваясь с косатками; но так бывает не всегда.

Ученые, исследующие пингвинов, не раз наблюдали такую картину: голодные пингвины сначала довольно долго толпятся на краю утеса, потом один из них наконец спрыгивает в воду, а когда он выныривает, то почти разом спрыгивают все остальные.

а) Объясните такое поведение пингвинов, предполагая, что каждый пингвин ведет себя рационально (анализирует всю доступную ему информацию и принимает решения, которые позволяют ему добиться максимально благоприятного для себя исхода).

б) Покажите, что описанная ситуация не является эффективной, то есть физически возможны такие альтернативные действия пингвинов, при которых всем пингвинам было бы не хуже, чем при действиях, описанных в условии, и хотя бы одному пингвину было бы лучше.

^aКосатка — крупное хищное морское млекопитающее семейства дельфиновых, внешним видом напоминающее кита.

^aВсероссийская олимпиада по экономике, 2011. Автор — Григорий Хацевич.

Задача 8. Охота на слонов (†)

Истребление живой природы является серьезной проблемой в Африке. Например, популяция слонов на этом континенте сократилась с более чем 1 млн особей в 1970-х гг. до 600 тыс. сейчас. Правительства разных стран пытаются бороться с браконьерством по-разному, и эта политика зачастую приводит к парадоксальным, на первый взгляд, результатам. Оказывается, что наименьшие проблемы с сокращением популяции слонов испытывают те страны, где... разрешена охота на них!

Например, власти Танзании запретили любую охоту на слонов в 1973 г., и за 5 лет после этого популяция этих животных сократилась более чем вдвое. После того, как в 1978 г. охота была вновь разрешена, количество особей стало расти и вернулось к своему прежнему уровню. Поселения, расположенные вблизи мест обитания слонов, активно пользуются своим правом продавать лицензии (в рамках установленной квоты) желающим поохотиться. Та же картина наблюдается в Зимбабве и других странах, где право на охоту можно законно купить.

а) Почему дикие животные, представляющие интерес для человека, часто подвергаются угрозе исчезновения, а домашние животные — нет?

б) Объясните, как легализация охоты на животных может приводить к росту популяции.

Всероссийская олимпиада по экономике, 2012. Автор — Данил Фёдоровых.

Задача 9 (†)

В племени Мумба-Юмба N человек ($N \geq 1$), каждый из которых ходит на охоту в лес. i -й соплеменник каждый день тратит на охоту долю c_i своего времени ($0 \leq c_i \leq 1$) и приносит y_i условных единиц добычи, при этом его производственная функция задается формулой $y_i = \sqrt{c_i}$. Каждый вечер, после возвращения охотников из леса, все соплеменники собираются вокруг костра и съедают всю принесенную за день добычу (каждый — свою), танцуют ритуальные танцы. Исследование, проведенное антропологами, показало, что i -й член племени оценивает свое удовольствие от прожитого дня в u_i единиц удовольствия, причем $u_i = x_i - c_i + R$, где x_i — количество съеденной добычи, а R — удовольствие от ритуальных танцев, которое всегда одинаковое и ни от чего не зависит. Каждый член племени стремится получить как можно больше удовольствия.

а) Сколько добычи каждый соплеменник будет приносить из леса в день, сколько времени будет тратить на охоту и какое удовольствие получать?

б) Выступая с новогодним обращением, вождь племени заявил, что отныне вся принесенная добыча будет складываться в одну кучу и затем делиться между всеми соплеменниками поровну. Изменится ли поведение членов племени в этих условиях? Ответьте на вопросы пункта а) и объясните получившиеся результаты.

Сибиряда-2011. Автор — Данил Фёдоровых

Задача 10 (†)

Нигачрок и Контрабасман выкрали из секретной лаборатории волшебную свинью-копилку. Если положить в нее деньги и сказать «Ахалай Махалай», то сумма, лежащая в свинье, увеличивается в полтора раза. Один недостаток: работает только раз. Нигачрок и Контрабасман решили поступить так: каждый положит в копилку сколько хочет (не зная, сколько положил другой), потом они скажут «Ахалай Махалай», разобьют копилку и поделят ее содержимое поровну.

а) Найдите равновесные по Нэшу величины вкладов Нигачрока и Контрабасмана.

б) Является ли этот набор вкладов эффективным по Парето? Если нет, то приведите пример эффективного набора вкладов либо докажите, что в данных условиях его не существует.

Экономический бой ЛЭШ-2011, идея из «Задачника для тигров» Бориса Демешева.

Задача 11 (†)

В сложной задаче из одного из семинаров ЛЭШ два пункта. Вы решили один пункт, а Ваш товарищ решил другой, при этом решение другого пункта каждому из вас никак не дается. Чтобы получить плюрик за задачу, нужно знать решение обоих пунктов, поэтому вы с товарищем решили поделиться знаниями друг с другом. С другой стороны, вы с ним являетесь конкурентами в рейтинге плюриков. Поэтому есть опасность, что после того, как первый расскажет свое решение, второй «кинет» его и сдаст задачу один. Никто не хотел рассказывать решение первым, и для справедливости вы решили, что каждый напишет свое решение на листке бумаги, после чего вы поменяетесь листками.

При разных исходах этого обмена будут разные результаты:

А. Если вы оба напишете на листке решение, то оба подниметесь в рейтинге на 1 место.

В. Если никто не напишет решение на листке, то ваш рейтинг не изменится.

С. Если решение напишет только один из вас, то его место в рейтинге не изменится, а другой поднимется на 2 места.

Формализуйте ситуацию в виде платежной матрицы (таблицы выигрышей) и найдите НЭ. Каждый участник максимизирует свое изменение рейтинга, изменения рейтинга двух участников независимы, поскольку они находятся в общей таблице далеко друг от друга. Является ли равновесие эффективным?

Задача 12 (†)

На судне N матросов и капитан. У каждого матроса есть шкатулка, в которой он хранит некоторый запас золотых монет, все шкатулки хранятся в одном сейфе. Во время бури все коробки попадали, золото рассыпалось, и невозможно определить, какие монеты выпали из каких шкатулок. Каждый матрос знает, сколько монет у него было, но не знает чужих количеств. Задача капитана — вернуть золото матросам так, чтобы каждый получил ровно столько, сколько было в его шкатулке. Конечно, если просто спросить о количестве их монет, никто не скажет правду. Придумайте механизм, в котором сообщение правды каждым матросом составляло бы равновесие.

Задача 13

Иногда люди (фирмы, правительства) предпринимают затратные действия, не несущие им прямой выгоды. Так, испанский конкистадор Эрнан Кортес сжег свои корабли при высадке в Мексике; многие государства подписали Киотский протокол, взяв на себя обязательства ограничить уровень выбросов в атмосферу вредных побочных продуктов промышленного производства; люди покупают дорогие абонементы в фитнес-центры, зная, что заведомо не смогут часто туда ходить.

а) Постройте к любой из этих ситуаций дерево игры с разумными выигрышами, выбирая их так, чтобы поведение людей действительно было оптимальным. Найдите SPNE. Является ли оно оптимальным?

б) Придумайте свой пример аналогичной ситуации и формально опишите его как игру.

Заочный конкурс РЭШ, 2012

Задача 14

Формализуйте игру, в которой сначала школьник на зачете в ЛЭШ решает, списывать решение задачи из шпаргалки или нет, а потом преподаватель решает, выгнать его или нет (преподаватель всегда может определить, списывал ли школьник).

Задача 15

Найдите SPNE в игре «Ультиматум», в которой сначала первый игрок выбирает, сколько из полученных от организатора 40 HS€ (целое число) отдать второму, и если второй не соглашается, то никто ничего не получает. Предположите, что игроки максимизируют свою сумму денег, а при равенстве сумм заботятся о справедливости.

Задача 16 (†)

Полный золота торговый корабль был захвачен $n \geq 3$ абсолютно рациональными пиратами. У пиратов есть строгая иерархия: капитан, первый помощник капитана, второй помощник и т. д. Пираты делят золото так: сначала капитан предлагает свой вариант дележа, затем пираты голосуют за или против, если дележ одобрен более чем половиной пиратов (включая предложившего дележ), то он принимается, если нет, то капитана убивают, и дележ предлагает первый помощник...

Каждый пират хочет остаться в живых и получить побольше золота. При одинаковых выгодах для себя пират голосует за тот вариант, где в живых остается больше сотоварищей. Какой дележ будет реализован (предположим, что золото бесконечно делимо)?

Источник — «Задачник для тигров» Бориса Демешева.

Задача 17 (†)

На маленькой фирме работают 10 человек. Каждый из них может работать либо старательно, либо «спустя рукава». Ни один работник не хотел бы быть уволенным. Работодатель видит качество работы каждого сотрудника и заинтересован в том, чтобы все работали старательно. Проблема заключается в том, что уволить можно не более чем одного сотрудника. Этот факт прекрасно известен работникам: они понимают, что если все будут плохо работать, то уволят только одного. Как построить систему угроз увольнений, чтобы каждый работал старательно?

Источник — «Задачник для тигров» Бориса Демешева.

Задача 18 (†)

В муниципалитете на повестку дня был поставлен вопрос о том, какую часть средств местного бюджета следует направить на развитие спорта. От депутатов поступило три предложения: (1) сохранить прежний объем финансирования, (2) увеличить финансирование на 20 %, (3) увеличить финансирование на 50 %. В местной думе всего семь депутатов. В соответствии с существующей процедурой решения принимается так: каждый из депутатов ранжирует поступившие предложения в порядке убывания предпочтительности. Побеждает предложение, которое на первое место в рейтинге ставит большинство депутатов (или предложение с наименьшим номером, если таких предложений несколько). В данном случае оказалось, что победило второе предложение.

Однако после того, как все рейтинги были составлены, поступила информация о том, что доходы местного бюджета оказались ниже запланированных, а потому было решено снять

с повестки голосования 3-е предложение о 50-процентном увеличении расходов. При этом решено заново предложения не ранжировать, а просто автоматически вычеркнуть в рейтинге каждого депутата третье предложение. Секретарь, производившая расчеты, обнаружила, что в новых условиях побеждает первая альтернатива. Будучи уверенной, что такого быть не может, и решила снова перепроверить результаты. Возможно ли, что расчеты секретаря верны? (Либо докажите, что подобное изменение выбора невозможно, либо приведите пример соответствующих рейтингов депутатов.)

Муниципальный этап ВОШ в Москве, 2009—2010 учебный год.

Задача 19. Уборка в общежитии (†)

Победив в олимпиаде, Алексей и Михаил стали студентами крупного экономического вуза в городе М. и поселились в одной комнате в общежитии. Ребята договорились убираться в комнате каждую неделю по субботам. Итоговая чистота комнаты (обозначим ее за G) зависит от того, сколько усилий каждый из них прикладывает к уборке. Обозначим эти уровни усилий за x_a (для Алексея) и x_m (для Михаила). Для простоты будем считать, что $G = x_a + x_m$.

Каждый из студентов хотел бы, чтобы комната была чистой, однако оба не любят убираться, причем Алексей не любит уборку вдвое сильнее, чем Михаил. Это отражено в их функциях полезности: полезность Михаила равна $G \cdot (8 - x_m)$, а полезность Алексея имеет вид $G \cdot (8 - 2x_a)$.

Расписание устроено так, что по субботам в первой половине дня в комнате отсутствует Алексей, а во второй — Михаил. Когда Алексей приходит с учебы, он видит «промежуточную» степень чистоты комнаты (равную уровню усилий Михаила) и принимает решение о том, сколько усилий приложить для завершения уборки.

а) Каковы будут уровни усилий, которые будут прикладывать Алексей и Михаил к уборке? Каков будет итоговый уровень чистоты комнаты?

б) Могут ли ребята договориться об уровнях усилий так, чтобы обоим стало лучше по сравнению с результатом пункта а)? Верно ли, что при этом комната непременно будет чище, чем в пункте а)?

Сибиряда — 2014 (10-й класс), автор — Алексей Суздальцев

Задача 20

Потенциальными арендаторами площадей в торговом центре являются 50 магазинов. Нахождение в большом торговом центре позволяет этим магазинам получить больше клиентов, при этом чем больше торговый центр, тем больше клиентов будет у каждого магазина. Торговый центр взимает с каждого арендатора плату в размере p , а каждая из фирм, решившая открыть магазин в торговом центре, получает выгоду $2n$, где n — количество остальных арендаторов (так, если арендаторов всего 19, то каждая получит выгоду 36).

а) Пусть сначала торговый центр выбирает p , а потом все магазины одновременно принимают решение, арендовать площадь или нет. Найдите равновесия по Нэшу.

б) Торговому центру удалось убедить 10 фирм бесплатно занять помещение на правах учредителей, после чего игра пункта а) происходит для оставшихся 40 фирм. Найдите равновесия.

в) Какую максимальную сумму торговый центр будет готов заплатить учредителям, чтобы гарантированно получить прибыль?

Задача 21. Манипулятор (†)

Совет директоров ЗАО «Манипулятор» состоит из трех человек — Васи, Пети и Маши (Маша — председатель совета). Они должны принять решение о том, какие рекомендации по распределению полученной компанией прибыли дать общему собранию акционеров. Существует три альтернативы:

Альтернатива А: Выплатить всю прибыль в виде дивидендов акционерам.

Альтернатива В: Вложить всю прибыль в покупку новейшего оборудования.

Альтернатива С: Выплатить половину прибыли в виде дивидендов, а вторую половину вложить в усовершенствование имеющегося оборудования.

Предпочтения членов совета относительно альтернатив представлены в таблице:

	Вася	Петя	Маша
Самая лучшая	А	В	С
Средняя	В	С	А
Самая худшая	С	А	В

На голосование выставляются все три альтернативы, и каждый член совета должен проголосовать ровно за одну из них. Если есть альтернатива, которая набрала больше одного голоса, то она реализуется, в противном случае реализуется та альтернатива, за которую проголосовала председатель Маша. Голосование открытое и последовательное: сначала свой выбор объявляет вслух один член совета директоров, после него — второй и, наконец, третий.

Порядок голосования определяет председатель Маша. Какой порядок она выберет?

Всероссийская олимпиада по экономике, 2013. Автор — Дмитрий Дагаев.

Неконкурентные рыночные структуры

Олигополии

Задача 1

Страны А и В являются единственными продавцами нефти на мировом рынке. Взаимодействие между ними происходит один раз. Каждая страна может выбрать один из трех объемов выпуска (L , M или H). Матрица выигрышей имеет следующий вид

		Страна В		
		L	M	H
Страна А	L	16 : 16	14 : 21	10 : 20
	M	21 : 14	15 : 15	9 : 12
	H	20 : 10	12 : 9	5 : 5

а) Предположим, страны выбирают уровень выпуска одновременно. Найдите равновесие по Нэшу. Эффективно ли оно?

б) Рассмотрим следующий порядок взаимодействия. Страна А объявляет, сколько нефти она произведет, после этого объявление об объеме выпуска делает страна В. Найдите равновесие, совершенное в подыграх.

Задача 2

(Модель Штакельберга) Спрос на рынке некоторого товара задан функцией $p = 120 - Q$. Две фирмы, производящие товар, имеют постоянные предельные издержки 40. Сначала первая фирма принимает решение об объеме выпуска, затем вторая фирма, услышав объявление первой, делает то же самое, а затем на рынке формируется цена. Найдите равновесие, совершенное в подыграх.

Задача 3 (†)

Решите предыдущую задачу, если фирм три. Сначала фирма 1 выбирает q_1 в период 1, фирма 2 выбирает q_2 в период 2, а фирма 3 выбирает q_3 в период 3.

Задача 4

В отрасли действуют только две фирмы, технологии которых описываются функциями издержек $c_1(q_1) = 0,5q_1$ и $c_2(q_2) = 1,5q_2$. Обратная функция спроса на продукцию отрасли имеет вид: $p(Q) = 2 - Q$. Найдите равновесие Курно (фирмы одновременно выбирают объем выпуска).

Задача 5

Повторите решение предыдущей задачи, если $c_1(q_1) = q_1^2$ и $c_2(q_2) = 2q_2^2$.

Задача 6 (°)

Рассмотрите отрасль, в которой существует 2 фирмы, конкурирующие по Бертранию (фирмы одновременно назначают цену, потребители распределяются поровну между всеми фирмами, где цена наименьшая), имеющих постоянные предельные издержки $c_i < 10$ для i -й

фирмы (постоянных издержек нет) и одновременно выбирающих цены товаров p_i . Спрос на рынке задан уравнением $P = 10 - Q$. Найдите равновесный исход и покажите, что все остальные исходы таковыми не являются.

Задача 7

Повторите решение предыдущей задачи, если на рынке конкурируют 3 фирмы.

Задача 8 (†)

Пусть в условиях модели Бертрана $c_1 = c_2 = 4$. Первая фирма говорит: я буду продавать товар по цене P_1 , а если вторая фирма будет продавать дешевле, то я компенсирую потребителям разницу в цене. Найдите равновесие, совершенное в подыграх, где сначала первая фирма делает такое объявление (выбирая P_1), потом вторая фирма выбирает P_2 , после чего покупатели решают, где и сколько товара купить.

Задача 9 (†)

На олигополистическом рынке магния работают две фирмы — «Магнус» и «Магняк», функции издержек которых одинаковы и имеют вид $TC(q) = q^2$. Если фирмы выберут уровни выпуска q_1 и q_2 , то на рынке установится цена, равная $9 - (q_1 + q_2)$. Об этой зависимости цены от выпусков знают обе фирмы. Кроме того, обе фирмы знают функции издержек друг друга.

а) Промышленные шпионы из «Магняка» вывели, что «Магнус» собирается произвести 5 тонн магния ($q_1 = 5$). Сколько должен произвести «Магняк», если менеджеры фирмы верят этой информации и стремятся максимизировать прибыль?

б) На самом деле, информация о выпуске «Магнуса» из пункта а) была искусно подброшенной дезинформацией. Сколько единиц продукции в действительности выгодно произвести «Магнусу», если его менеджеры уверены, что дезинформация «сработала» и «Магняк» выберет уровень выпуска, найденный Вами в пункте а)?

в) Найдите выпуски фирм, если одновременно выполнены три условия:

1. «Магняк», в отличие от пункта а), не поверил дезинформации «Магнуса».

2. «Магнус» уверен, что «Магняк» поверил дезинформации «Магнуса».

3. «Магняк» уверен, что «Магнус» уверен, что «Магняк» поверил дезинформации «Магнуса».

г) Поняв общий принцип, сформулируйте и решите следующий пункт данной задачи.

д) Решите пункт с номером ∞ .

Пункты а)–в) из Межрегиональной олимпиады школьников НИУ ВШЭ и других вузов, 2012 г. (автор — Дмитрий Дагаев); автор пунктов г)–д) — Алексей Суздальцев.

Задача 10

Фирма «Мегафно» уже давно работает на рынке сотовой связи города Замиссисиписка. Спрос на рынке задан функцией $Q = 100 - P$, где P — цена минуты разговора, а Q — объем спроса (другие услуги связи замиссисипинцам не нужны). Фирма производит товар по технологии, позволяющей ей производить единицу услуги с нулевыми предельными издержками.

Новичок, фирма «Еле2», собирается войти на рынок. Чтобы осуществить вход, фирме нужно установить сотовые вышки, затратив F (если фирма решит не входить, то платить F не нужно), после чего она сможет производить товар по той же технологии, что и первая фирма. Если фирма «Еле2» войдет на рынок, то между фирмами состоится конкуренция по Штакельбергу: сначала «Мегафно» выберет объем выпуска, после этого объем выпуска будет выбран фирмой «Еле2», после чего потребители закупают услуги по цене спроса.

Войдет ли вторая фирма на рынок, и если да, то сколько произведет?

Экономический бой ЛЭШ-2013

Задача 11 (†)

В некоторой стране есть два города и прямая дорога между ними. В каждом городе живет ровно треть населения, а оставшаяся треть равномерно распределена вдоль дороги. Джим Бим и Джек Дэниэлс — единственные во всей стране владельцы лицензий на продажу алкогольных напитков. Рынок этой продукции строго регулируется — государство установило фиксированную цену $\bar{p}$ на бутылку любого алкоголя. Каждый производитель несет фиксированные предельные издержки c ($c < \bar{p}$).

Сначала Джим и Джек независимо решают (максимизируя каждый свою прибыль), где разместить магазины (в одном из городов или на дороге), а затем каждый житель страны принимает решение, в какой из двух магазинов идти (чем ближе идти, тем лучше). Если магазины расположены в одной точке, то потребители делятся поровну между ними.

- Найдите равновесное по Нэшу расположение магазинов.
- Является ли это расположение эффективным по Парето?

не может потребовать свой талон обратно в случае обмана, согласится ли Женя участвовать в таком обмене? А Костя?

в) Изменятся ли решения мальчиков, если они договариваются, что будут производить такой обмен каждый день в течение недели? А если в течение всего учебного года?

Заочный конкурс РЭШ, 2012

Задача 13 (†)

Нигачрок испек пирог и оставил его в духовке своим детям — Пете и Наде. Потом он ушел в магазин на час и наказал каждые полчаса, начиная с момента закрытия за ним двери, пытаться делить пирог по принципу «один делит, другой одобряет». Если не одобряет, то пирог полчаса остывает в печи, после чего процедура повторяется. Начинает предлагать Петя, во второй раз предложение будет делать Надя. За время получаса пирог сохраняет только половину своих замечательных вкусовых свойств с точки зрения обоих детей, и это является общеизвестным фактом. Если Нигачрок пришел и обнаружил неподеленный пирог (в момент прихода Нигачрока уже делить нельзя), то он его сходу съедает сам. Найдите равновесие по Нэшу, совершенное в подыграх.

Идея — «Задачник для тигров» Бориса Демешева

Теория игр**Разные задачи****Задача 12**

По программе «Вкусное питание» Женя и Костя получают талоны, которые они могут обменять на жвачку и колу в школьной столовой. Женя получает два талона на одну жвачку каждый, Костя получает два талона на одну колу каждый, то есть Женя может сжевать две жвачки, а Костя выпить две колы в день. Однако оба мальчика любят разнообразие и предпочли бы потреблять по одной жвачке и коле в день. Кроме того, как для Жени, так и для Кости, жвачки и колы много не бывает, то есть чем больше жвачки и колы мальчики потребляют в день, тем им лучше.

а) Могут ли мальчики устроить взаимовыгодный обмен? Если да, то каково будет распределение жвачки и колы, достигнутое в результате этого обмена?

б) Допустим, они могут устроить только последовательный обмен: сначала Женя решает, отдавать ли один талон на жвачку Косте, а потом Костя решает, отдавать ли один талон на колу Жене. Если Костя учится в седьмом классе, а Женя — только во втором, и поэтому

Макроэкономика

Монетарная политика

Задача 1

На первом этапе депозитного расширения вкладчики вложили в банковскую систему 1 млрд рублей. Банки выдали кредитов на сумму в 750 млн рублей, хотя имели возможность выдать кредиты максимально на сумму 800 млн рублей.

а) Определить $R_{\text{обяз}}$, $R_{\text{изб}}$ на первом этапе депозитного расширения, rr , er , а также денежную массу в банковской системе, если все банки имеют одинаковую норму избыточных резервов, а население не хранит наличных денег.

б) Из-за благоприятной ситуации в экономике банки стали брать на себя большие риски, связанные с уменьшением количества денег в резервах, снизив er до нуля. Считая, что население по-прежнему не хранит наличных денег, определите денежную массу в банковской системе в этом случае.

в) Найдите два денежных мультипликатора: первоначальный и новый.

Задача 2

Норма избыточных резервов коммерческого банка составляет 20%, а его совокупные резервы равны 30 млн. рублей. Известно, что если банк выдаст в кредит 10 млн. рублей, то его кредитные возможности уменьшатся до уровня, равного обязательным резервам. Все банки в банковской системе имеют такую же норму избыточных резервов, как и данный банк. Население всегда хранит денег на депозитах в 2,5 раза больше, чем в наличности. На какую сумму изменится денежная масса, если ЦБ выкупит государственные облигации на 100 тысяч рублей?

Задача 3

а) Что может произойти с денежной массой при одновременном повышении денежной базы и растущему желанию людей хранить деньги на руках?

б) Может ли снизиться денежный мультипликатор, если люди станут меньше класть депозитов на банковские счета, а наличность и нормы обязательных и избыточных резервов останутся на том же уровне? Докажите ответ.

Задача 4

Любая экономическая модель строится на основе упрощающих предположений, о которых не стоит забывать. Это относится и к модели депозитного (банковского) мультипликатора, с помощью которой экономисты описывают процесс создания кредитных денег. По состоянию на 1 марта 2011г. норма обязательного резервирования, установленная Банком России (для счетов резидентов РФ), составляла 3,5%. При этом денежная масса (агрегат M2) составляла 19531 млрд. руб., наличные деньги (агрегат M0) составляли 4892 млрд. руб., а денежная база — 7431 млрд. руб.

Может ли модель депозитного мультипликатора объяснить взаимосвязь между приведенными статистическими данными? Если нет, то почему?

Источник — всероссийская олимпиада, 2011 год

Задача 5

Объем спроса заемных средств со стороны фирм по отношению к банковской системе Y^C (млрд руб.) зависит от цены кредита — реальной ставки процента r^C (%), под которую банк выдает кредиты, и описывается уравнением $Y^C = 100 - 10r^C$.

Предложение депозитов со стороны населения по отношению к банковской системе Y^D определяется ставкой процента по депозитам r^D и описывается уравнением $Y^D = 10r^D$.

Норма обязательных резервов составляет rr , коммерческие банки не держат добровольных резервов.

Прибыль коммерческих банков от депозитно-кредитных операций равна нулю.

а) Объясните, почему объем кредитных средств, выданных банковской системой фирмам отличается от объема депозитов. Выпишите уравнение, связывающее эти величины

б) Объясните, почему ставка по кредитам отличается от ставки по депозитам. Выпишите уравнения, связывающие эти величины.

в) Предположим, норма обязательных резервов составляет 50 %. Какой будет общий объем депозитов и кредитов? Какие будут доходности по депозитам и по кредитам?

Задача 6

Банковский мультипликатор равен 5. Кредитные возможности банковской системы использованы полностью. Центральный банк снижает норму обязательного резервирования. Вследствие этого кредитные возможности коммерческих банков возрастают в совокупности на 2.5 млрд. рублей. Если дополнительные кредитные возможности банков будут реализованы, вся банковская система сможет создать новые деньги на сумму 25 млрд. рублей. Определите первоначальное rr_1 , конечное значение rr_2 , а также первоначальное и конечное значения денежной массы: M_1 и M_2 . Предполагается, что люди не хранят наличности.

Акимов Д.В., Дичева О.В., Шукина Л.Б.: Задания по экономике: от простых до олимпиадных

Задача 7

Предложение денег в экономике является результатом кредитной мультипликации. Известно, что банковская система имеет избыточные резервы в объеме 17,5 млрд.руб., причём норма избыточных резервов составляет десятую часть от действующей нормы обязательного резервирования. С целью простимулировать экономику ЦБ снижает норму обязательного резервирования до 10%. Если коммерческие банки откажутся от избыточных резервов и полностью реализуют свои кредитные возможности, то смогут обеспечить дополнительное предложение денег в размере 525 млрд. руб.

Определите:

а) исходное значение нормы обязательного резервирования, первоначальный и конечный объём депозитов в банковской системе, если коммерческие банки откажутся от избыточных резервов;

б) как изменится предложение денег, если коммерческие банки предпочтут сохранить избыточные резервы в неизменном объёме.

Источник — окружной тур всероссийской олимпиады в г.Москва, 2010 год

Задача 8

Объем спроса заемных средств со стороны фирм по отношению к банковской системе (млрд. руб.) зависит от цены кредита - реальной ставки процента (%), под которую банк

выдает кредиты, и описывается уравнением. Предложение депозитов со стороны населения по отношению к банковской системе определяется ставкой процента по депозитам и описывается уравнением. Норма обязательных резервов составляет, коммерческие банки не держат добровольных резервов. Прибыль коммерческих банков от депозитно-кредитных операций равна нулю.

а) Объясните, почему объем кредитных средств, выданных банковской системой фирмам отличается от объема депозитов. Выпишите уравнение, связывающее эти величины.

б) Объясните, почему ставка по кредитам отличается от ставки по депозитам. Выпишите уравнения, связывающие эти величины.

в) Предположим, норма обязательных резервов составляет 50%. Какой будет общий объем депозитов и кредитов? Какие будут доходности по депозитам и по кредитам?

Источник – всероссийская олимпиада, 2002 год

Задача 9

В стране «Ватния» существует банк «Зпирпанк», имеющий огромную долю на рынке кредитования. В этот банк обращается огромное количество граждан «Ватников», но из-за шаткого состояния в экономике страны и рисков невозврата кредита, связанных с высоким уровнем алкоголизма и неответственности в стране, банк рационализирует количество кредитов. Функция, показывающая зависимость возврата долгов от суммы выданных кредитов, в Ватнии имеет вид

$$Q_{Ret} = \begin{cases} 120 - x & \text{if } x \geq 50 \\ (1 + r)x & \text{if } 0 \leq x \leq 50 \end{cases}$$

x — совокупная сумма выданных кредитов,

r — ставка процента по кредитам,

Q_{Ret} — совокупный погашенный долг.

Экономисты банка вывели эту функцию, поэтому Зпирбанк принимает решения с её учётом. Предположим, что «Зпирбанк» получает деньги только от ЦБ Ватнии под нулевую ставку процента, система депозитов в стране отсутствует. «Зпирбанк» выдаёт кредиты под фиксированную ставку процента $r = 40\%$, которую директивно установил ЦБ Ватнии и никогда не будет менять. Спрос Ватников на кредит является неограниченным по данной ставке (только бы дали).

а) Определите количество денежных средств, выданных банком в кредит, при условии что банк максимизирует свою прибыль.

б) В Ватнии скоро пройдут выборы и нынешний президент Ватнии хочет поднять свою репутацию, чтобы увеличить шансы быть переизбранным. К сожалению, он не имеет экономического образования, поэтому для улучшения жизни граждан к выборам, он решил снизить валовую ставку процента по кредиту, который «Зпирбанк» получает у ЦБ, на 20 процентных пунктов, т.е. теперь за 100 ден. единиц, взятых у ЦБ в кредит, банк возвращает только 80 ден. единиц, и оплачивается эта мера, конечно же, из государственного бюджета. Причём, все взятые «щедрые» деньги должно раздаваться в кредит, просто так даваться Зпирбанку они не будут. Сколько денежных средств будет выдано банком в кредит Ватникам при такой инициативе президента при предположении о максимизации банком своей прибыли?

в) Прокомментируйте действия президента, объясните результат инициативы президента и поведение банка.

Задача 10

Когда-то на острове Ляп были деньги, но не было банков. Деньгами жителям острова служили большие круглые камни с дыркой посередине, чтобы удобнее было крутить их над головой, привязав веревкой. Всего на острове было 1024 таких камня. На остров приплыл мореплаватель Кук и открыл первое на острове Камнехранилище (далее - КЩ). Выяснилось, что при открытии КЩ каждый житель, имеющий деньги, половину из них притащил в КЩ. Из принесенных денег, Кук половину держал под рукой, а половину отдавал займам всем желающим – покрутить. Из полученного кредита половина вскоре вновь попадала в КЩ. ... Чему равнялась величина денежной массы на острове Ляп до и после открытия КЩ?

Источник – всероссийская олимпиада, 2002 год

Задача 11

В первой половине лета 2004 года над стабильностью банковской системы России нависла угроза кризиса. Центральный Банк был вынужден отозвать лицензии у нескольких мелких банков. В СМИ активно обсуждался пресловутый «черный список» банков, стоящих на очереди к закрытию. Многие средние банки испытали на себе неприятные последствия банковской паники. Люди выстраивались в очереди к банкам, чтобы досрочно снять положенные в банки деньги, а инкассаторские машины банков выстраивались в очередь у хранилища ЦБ для получения наличных денег. В пиковые дни банковского кризиса Центральный Банк выдавал коммерческим банкам ежедневно более 10 млрд. руб. дополнительной наличности. Для предотвращения нарастания кризиса Центральный Банк предпринял, среди прочих, следующие меры:

- 15 июня 2004 года ставка рефинансирования была снижена с 14% до 13%,
 - 8 июля 2004 года норма обязательных резервных требований была снижена с 7% до 3.5%.
- Летом 2004 года исследователи отмечали, что в то время как вкладчики изымали свои деньги из мелких проблемных коммерческих банков, крупные банки (такие как Сбербанк и Внешторгбанк) увеличили объемы депозитов. Также наблюдался рост спроса на автомобили. Несколько вырос обменный курс иностранной валюты.

Задание:

а) Должен ли ЦБ финансировать любые банки в любых ситуациях? Приведите не менее двух аргументов в пользу своей точки зрения.

б) Объясните взаимосвязь между банковской паникой и ростом спроса на автомобили и иностранную валюту.

в) Как Вам кажется, почему в условиях банковского кризиса что-то выиграли крупные банки, такие как Сбербанк и Внешторгбанк?

г) Многие наблюдатели высказывали опасение, что подобное развитие событий в банковском секторе и соответствующие действия Центрального Банка могут спровоцировать рост уровня инфляции. Объясните возможную логику данного вывода? Согласны ли Вы с ним?

д) Не секрет, что социологические исследования говорят о крайне низкой степени доверия граждан России к отечественной банковской системе. Объясните, как это отражается на структуре денежной массы (агрегате 2, по определению Центрального Банка России). А именно, как это отражается на соотношении между наличными деньгами (M_0) и депозитами? Как это отражается на денежном мультипликаторе?

Основано на эссе из московской олимпиады, 2005 год

Задача 12

Дума обсуждала два проекта стимулирующей монетарной политики. Согласно оценкам экономических советников, варианты равнозначны и выбор одного из них может быть основан исключительно на субъективных предпочтениях депутатов.

1 вариант	Снижение нормы обязательных резервов на 4 процентных пункта
2 вариант	Покупка государственных облигаций на сумму 5 млн. руб

В результате, как всегда, продолжительных дебатов решили принять «промежуточный вариант»: снижение нормы обязательных резервов на 2 процентных пункта, покупка государственных облигаций на сумму 2,5 млн. руб. По итогам реализации этого решения денежная масса возросла на 25млн. руб.

Считая, что в данной экономике коммерческие банки не хранят избыточные резервы, а население не хранит наличных денег, определите:

- первоначальный объем денежной массы;
- первоначальное значение нормы обязательных резервов;
- отличаются ли результаты реализации «промежуточного варианта» от первоначально предлагавшихся.

Источник – всероссийская олимпиада, 2004 год

Задача 14

Что делать главе ФРС Б. Бернанке, если часть крупнейших банков обанкротилась и доверие людей к банковской системе подорвано, для предотвращения банкротств остальных банков? Какие проблемы могут возникнуть, если он поможет экономике предложенными Вами методами?

Задача 13

На графике изображена динамика денежного мультипликатора для денежного агрегата $M1^a$ в экономике США с 1983 по 2009 год.



- Как вы можете объяснить долгосрочную тенденцию к понижению величины денежного мультипликатора с 1980 по 2005 год? Приведите не менее двух причин.
- Какие факторы могут объяснить резкое падение мультипликатора в 2007-2009 годах? Приведите не менее двух причин.

^a Денежный агрегат $M1$ = наличность + депозиты до востребования + дорожные чеки. Данный мультипликатор представляет собой отношение $M2$ к $M1$ в экономике США, где $M2 = M1 +$ мелкие срочные вклады + сберегательные вклады.

Макроэкономика

Открытая экономика

Задача 1

Рассмотрим валютный рынок. Известно, что при курсе 10 руб./долл. объём рыночного предложения валюты равен нулю, а величина спроса составляет 60 млн. долларов. Кроме того, известно, что при курсе 30 руб./долл. рынок находится в равновесии, и равновесный объём продаж валюты составляет 40 млн. долларов. При курсе ниже 10 руб./долл. никто не хочет продавать доллары. В предположении, что функции спроса и предложения — линейные, определите, какой объём валюты должен продать или купить Центральный банк, чтобы снизить равновесный курс до 25 руб./долл.?

Задача 2

На валютном рынке при курсе 40 руб./фунт величина предложения положительна и величина спроса больше величины предложения на 30 млн фунтов, а при курсе 70 руб./фунт величина спроса положительна и величина предложения больше величины спроса на 45 млн фунтов. Функции спроса и предложения линейны. Определите, какой объём фунтов ЦБ должен продать или купить, чтобы равновесный курс составил 54 руб./фунт?

Задача 3

Предположим, что финансовые рынки во всём мире настолько эффективны, что арбитража не существует, и потому реальный курс равен единице. Определите номинальный курс рубля по отношению к другим валютам на основании приведённой информации:

	В России	В другой стране
Кофе	120 рублей	4 доллара
Шоколадка	75 рублей	1,5 фунта
Бигмак	100 рублей	2,5 евро

Задача 4

Определите реальные курсы рубля к другим валютам на основании приведённой информации:

	Номинальный курс	В России	В другой стране
Кофе	35 руб./долл.	120 рублей	4 доллара
Шоколадка	1/52 фунт/руб	75 рублей	1,5 фунта
Бигмак	45 руб./евро	100 рублей	2,5 евро

а) Посчитайте реальные курсы рубля. Какую информацию нам даёт реальный курс валют?

б) Можно ли заработать на перепродаже кофе, шоколадок и бигмаков? Если да, то как и при каких условиях? Если нет, то почему?

Задача 5

Центральный банк России повысил ставку рефинансирования, и, как оказалось, ФРС США в тот же момент снизил ставку рефинансирования. Как эти изменения повлияют на курсы валют России и США? Из-за чего могут произойти эти изменения?

Задача 6

а) Экспортёры или импортёры выиграют от удешевления национальной валюты при прочих равных? Почему? А от удорожания?

б) Могут ли цены измениться таким образом, что экспортёрам и импортёрам снижение курса валют будет безразличным? Возможно ли такое, что несмотря на благоприятное для экспортёров изменение валютного курса, из-за изменения цен импортёры в итоге окажутся в выигрыше?

Задача 7

1 января 2014 года Вася и Петя получили от своих родителей новогодние подарки для поездки за границу. Вася получил в подарок доллары для поездки в США, а Петя получил евро для поездки в Германию. Даты отлёта ребят совпадали — 1 июля 2014 года. Изначально Вася оказался расстроен, так как из-за разницы в валютных курсах Петин подарок в рублёвом эквиваленте оказался больше ровно на 10000 рублей. За время до отлёта Васе и Пете удалось заработать: каждый месяц с 1 января по 1 июля курс доллара и курс евро увеличивались на фиксированное число рублей в месяц. Васе повезло больше: курс доллара рос сильнее, и на 1 июля его сумма в рублёвом эквиваленте оказалась на 2000 рублей больше, чем у Пети. Определите, на какое число ребята должны были запланировать свои поездки (учитывая, что улетят они всё равно в один день), чтобы на день отлёта их суммы в рублёвом эквиваленте совпадали.

Задача 8 (†)

Три инвестиционные компании разработали различные стратегии по игре на валютном рынке на ближайший месяц:

Компания	Валюта, в которой следует хранить сбережения	
	1-5 день	6-15 день
Альфа	Швейцарские франки (CHF)	Доллары (USD)
Бета	Евро (EUR)	Евро (EUR)
Гамма	Швейцарские франки (CHF)	Швейцарские франки (CHF)

Оказалось, что валютные курсы изменялись за рассматриваемый период следующим образом:

	Изначально	1-5 день	6-15 день
Курс CHF	50 рублей	Рос на 25 копеек в день	Рос на 25 копеек в день
Курс USD	30 рублей	Рос на 15 копеек в день	Падал на 9 копеек в день
Курс EUR	40 рублей	Рос на 8 копеек в день	Рос на 8 копеек в день

Три друга, Петя, Вася и Женья, имеющие в распоряжении по 1000 рублей, в начале месяца решили сыграть на валютном рынке и для этого доверить управление своими средствами одной из трёх компаний. Компании Альфа и Бета проводили рекламную акцию и предлагали свои услуги бесплатно. Услуги компании Гамма стоили x рублей, причём оплачивать

их клиент должен в момент снятия средств из оказавшейся у него на руках суммы (по контракту всех компаний клиент должен одновременно снимать всю накопившуюся сумму по истечении срока действия контракта). Петя воспользовался услугами компании Альфа, Вася — Бета, а недоверчивый Женя — Гамма. Друзья заключили контракты на одинаковые сроки, и оказались в итоге с одинаковым выигрышем.

Определите:

- на какой срок были заключены контракты;
- выигрыш каждого из друзей;
- значение x .

Задача 9

а) Финансовый кризис 2007-09 годов в США и во многих других развитых странах — это, прежде всего, кризис нехватки ликвидности. Объясните, почему кризис ликвидности на западных рынках может привести к аналогичному кризису на российских рынках.

б) Объясните возможную взаимосвязь между кризисом ликвидности на западных рынках и обвалом котировок ценных бумаг на российском фондовом рынке.

Задача 10 (†)

Гипотеза «ресурсного проклятия» в «сильной форме» говорит о том, что экономики, обладающие большим объемом сосредоточенных природных ресурсов (нефти, газа, угля, минералов), растут медленнее других. Данная гипотеза в последнее время часто подвергается сомнению. В частности, примером стабильно растущей экономики может служить богатая ресурсами Норвегия. Гипотеза «ресурсного проклятия» в «слабой форме» состоит в том, что развивающиеся экономики, богатые сосредоточенными природными ресурсами, используют их неэффективно. Теория «голландской болезни» описывает один из механизмов неблагоприятного воздействия «ресурсного проклятия». На протяжении двух десятилетий после открытия и начала разработки газовых месторождений на севере Нидерландов в конце 1950-ых, страна столкнулась не только с ростом экспорта сырья, но и с ростом импорта, вызвавшим серьезный спад в других отраслях экономики.

а) Предположим, что страна столкнулась с ростом мировых цен экспортируемых товаров. Объясните, как это отразится на инфляции, номинальном и реальном обменном курсе иностранной валюты в двух различных ситуациях: (а) в случае, когда центральный банк проводит политику фиксированного обменного курса, и (б) для режима плавающего обменного курса. Можно ли говорить о качественно схожих последствиях роста цен экспортируемых товаров для реального курса иностранной валюты?

б) Предположим, что экономику страны можно разбить на два сектора: сектор, производящий экспортируемые товары, и сектор, производящий товары для внутреннего рынка (товары, которые конкурируют с аналогичными импортными товарами). Отталкиваясь от ответа, данного Вами на пункт а), объясните, к каким последствиям для импорта и импортозамещающего производства в стране приведет рост мировых цен экспортируемых товаров? Как в итоге изменится структура национального производства и потоки ресурсов в экономике?

в) Бум в добывающем секторе экономики и спад в обрабатывающих и высокотехнологичных национальных отраслях, являющиеся следствием роста цен экспортируемого сырья, могут неблагоприятно отразиться на экономическом росте. В определенном смысле, можно говорить о том, что бурный рост добывающего сектора порождает отрицательный внешний эффект для других секторов экономики. Объясните эти соображения с точки зрения двух

основных механизмах долгосрочного экономического роста: процесса накопления человеческого капитала и инноваций (инвестиций в новые технологии).

Основано на эссе из всероссийской олимпиады 2007 года

Задача 11 (†)

В конце 2008-начале 2009 года произошёл значительный рост курса доллара (с 24 рублей за доллар в августе 2008 года до 36 рублей за доллар в феврале 2009 года). Однако девальвация рубля была плавной, чему способствовал ЦБ, значительно сократив свои золотовалютные резервы (с 600 млрд. до 386 млрд. за тот же период). При этом, согласно экспертным оценкам, доходы коммерческих банков от девальвации составили около 760 млрд. руб. Примечательно, что рассматриваемые события происходили в условиях наличия у российских коммерческих банков «currency mismatch» — их активы выражены преимущественно в отечественной валюте, а пассивы — в иностранной.

а) Чем могла быть мотивировано политика плавной девальвации? В частности, как она могла помочь населению и коммерческим банкам?

б) Основной элемент критики политики плавной девальвации заключается в том, что она сделала невыгодным для банков кредитование предприятий, однако именно для этого Банк России вливал деньги в банковскую систему. Более того, плавная девальвация стимулирует дальнейшую девальвацию. Объясните логику данного утверждения.

в) Банк России сопровождал политику плавной девальвации ужесточением монетарной политики. Одно из объяснений действий ЦБ — сдержать дальнейшее (уже спекулятивное) давление на рубль. Объясните, почему сокращение золотовалютных резервов может усиливать давление на рубль, а ужесточение монетарной политики данное давление уменьшает.

г) При каких условиях Банк России был бы вынужден отказаться от режима фиксированного валютного курса? Какую роль играют при этом действия спекулянтов на валютном рынке?

Основано на эссе из всероссийской олимпиады 2009 года

Задача 12 (†)

В 2011 году Банк России рассматривал три варианта условий проведения денежно-кредитной политики в 2012-2014 годах, в основу которых были положены разные цены на нефть (75, 100 и 125 долларов США за баррель).

а) Как изменения цен на нефть влияют на цену рубля относительно других валют? Почему ожидания роста цен на нефть в будущем могут оказать значительное влияние на обменный курс рубля в настоящее время?

б) Предположим, что Банк России полностью перешёл к режиму плавающего валютного курса и реализовался сценарий, при котором цена на нефть окажется на уровне 125 долларов за баррель. Опираясь на результат пункта б), покажите, как такое изменение повлияло бы на:

- благосостояние российских покупателей иностранной одежды, иностранных автомобилей;
- желание иностранных туристов приезжать в Россию;
- благосостояние российских граждан, получающих денежные переводы от родственников, работающих за границей.

в) Проводя курсовую политику, Банк России использует в качестве операционного ориентира рублевую стоимость бивалютной корзины, в которую входят доллары и евро с определенным весом. При этом удельный вес евро в корзине неуклонно растет: на 1 февраля

2005 года он составлял 10 %, на 15 марта 2005 года — 20 %, на 16 мая 2005 года — 30 %, на 1 августа 2005 года — 35 %, на 1 декабря 2005 года — 40 %, и начиная с 8 февраля 2007 года по сегодняшний день — 45 %. По какой причине Банк России мог изменять удельный вес евро в бивалютной корзине? Как изменение удельного веса евро влияет на структуру золотовалютных резервов Банка России?

г) Основной задачей курсовой политики Банка России на 2012 год и период 2013-2014 годов являлось «последовательное сокращение прямого вмешательства Банка России в курсообразование и создание условий для перехода к режиму плавающего валютного курса». Если Банк России перейдет к этому режиму, то следует ожидать скорее увеличения или снижения амплитуды колебаний валютного курса? Почему Центральный Банк может быть заинтересован в переходе к режиму плавающего курса?

Основано на эссе из всероссийской олимпиады 2012 года

Задача 13 (†)

Санкции России против Запада заключаются в введении запрета на импорт некоторых товаров из стран, которые попали под санкции. Эта мера была принята, чтобы ослабить позиции западных экспортёров, их промышленность и сельское хозяйство. Но как вы знаете из курса микроэкономики, после этого данного запрета цены в России на данные товары и их заменители станут повышаться, как минимум в краткосрочном периоде из-за издержек заключения новых договоров.

а) Что бы происходило с номинальным курсом валют, если бы ЦБ его не держал, при прочих равных? Объясните на графике

б) Предположим курс рубля плавающий. Что произойдёт с реальным курсом рубля к валютам стран из списка и не из списка? Как сильно изменится реальный курс рубля к другим валютам, и есть ли связь со списком и силой изменения реального курса?

в) Какие изменения ждут чистый экспорт, при условиях, что импорт из стран, попавших под российские санкции, невозможен, и ЦБ держит номинальный курс фиксированным по отношению к этим валютам?

г) ЦБ решил отказаться от своих планов и выправить сложившуюся в экономике ситуацию. Что должен делать ЦБ на валютном рынке, чтобы удержать реальный курс на прежнем уровне?

Экономический бой

Правила

Настоящие Правила основаны на *Правилах математического боя XV Уральского (VIII Кировского) турнира юных математиков*: <http://olympiads.mccme.ru/ural/15/pravmb.htm>

Общие положения

Экономический бой — это соревнование двух команд в решении экономических задач. Он состоит из двух частей. Сначала команды получают условия задач и определенное время на их решение. При решении задач команда может использовать любую литературу, но не имеет права общаться по поводу решения задач ни с кем, кроме жюри. По истечении этого времени начинается собственно бой, когда команды в соответствии с правилами рассказывают друг другу решения задач. Если одна команда рассказывает решение, то другая оппонирует его, т. е. ищет в нем ошибки (недостатки), и, если решения нет, то, возможно, приводит свое. При этом выступления оппонента и докладчика оцениваются жюри в баллах (за решение и за оппонирование). Если команды, обсудив предложенное решение, все-таки до конца задачу не решили или не обнаружили допущенные ошибки, то часть баллов (или даже все баллы) может забрать себе жюри боя. Если по окончании боя результаты команд отличаются не более чем на 3 балла, то считается, что бой закончился вничью. В противном случае побеждает команда, которая по окончании боя набирает больше баллов. Если же по условиям боя он не может закончиться вничью, то жюри до боя объявляет это командам и оглашает процедуру определения победителя.

Капитаны команд имеют право попросить жюри о предоставлении перерыва в ходе боя на 5—10 минут (примерно через каждые полтора часа). Перерыв может предоставляться только между обсуждением двух различных задач (между раундами). При этом команда, которая должна сделать вызов, делает его в письменной форме (без оглашения) непосредственно перед началом перерыва и сдает жюри, которое оглашает этот вызов сразу после окончания перерыва.

1 Вызовы

Бой состоит из нескольких раундов. В начале каждого раунда (если не происходит отказ от вызова — см. ниже пункт «Окончание боя») одна из команд вызывает другую на одну из задач, решения которых еще не рассказывались (например: «Мы вызываем команду соперников на задачу номер 4»). После этого вызванная команда сообщает, *принимает ли она вызов*, т. е. согласна ли рассказывать решение задачи, на которую была вызвана (ответ можно обдумывать, но не более 1 минуты). Если да, то она выставляет *докладчика*, который должен рассказать решение, а вызвавшая команда выставляет *оппонента*, обязанность которого — искать в решении ошибки. Если вызванная команда не принимает вызов, то докладчика обязана выставить команда, которая вызывала, а отказавшаяся отвечать команда выставляет оппонента. Команда, желающая сохранить выходы к доске, может отказаться выставлять оппонента. Тогда она в этом раунде не участвует (и изменить своего решения уже не может).

2 Первый вызов. Конкурс капитанов.

Кто будет делать первый вызов, определяет команда, победившая в конкурсе капитанов. Он проводится в начале боя. Капитанам предлагается задача. Капитан, первым сообщивший жюри

о своем желании отвечать, получает такое право. Если он рассказывает правильное решение, то он победил, а если неправильное — победил его соперник. При этом что понимается под «правильным решением»: просто верный ответ, ответ с объяснением или что-либо еще — жюри при необходимости уточняет перед началом конкурса капитанов.

На решение задачи конкурса капитанов жюри отводит определенное время. Если за это время ни один из капитанов не высказал желания отвечать, жюри может заменить задачу или выявить победителя жребием. Вместо задачи жюри может предложить капитанам сыграть в игру. В этом случае победителем считается тот, кто выигрывает игру. Возможны и другие схемы проведения конкурса капитанов. Жюри боя заранее определяет способ проведения конкурса капитанов и сообщает о нем командам перед началом боя.

При желании на конкурс вместо капитана можно выставить любого другого члена команды.

3 Ход раунда

3.1 Доклад

В начале раунда докладчик рассказывает решение. Доклад должен содержать ответы на все поставленные в задаче вопросы и доказательство правильности и полноты полученных ответов. В частности, докладчик обязан доказать каждое сформулированное им промежуточное утверждение либо сослаться на него, как на общеизвестное. Докладчик должен стремиться к ясности изложения, в частности, он обязан повторить по просьбе оппонента или жюри любую часть своего доклада. Время на доклад ограничивается 15 минутами, после чего жюри решает, разрешать ли докладчику рассказывать дальше.

Докладчик может иметь бумагу с чертежами и (с отдельного разрешения жюри) вычислениями. Но он не имеет права брать с собой текст решения.

Докладчик имеет право:

- до начала выступления вынести на доску всю необходимую информацию (чертежи, вычисления и т. п.);
- не отвечать на вопросы оппонента, заданные до начала обсуждения;
- просить оппонента уточнить свой вопрос (в частности, докладчик может предложить свою версию вопроса: «Правильно ли я понимаю, что вы спросили о том-то и том-то?»);
- отказаться отвечать на вопрос, сказав, что: (а) он не имеет ответа на этот вопрос; (б) он уже ответил на этот вопрос (объяснив, когда и как); (в) вопрос некорректен или выходит за рамки научной дискуссии по поставленной задаче. В случае несогласия оппонента с основаниями (б) и (в) арбитром выступает жюри.

Докладчик не обязан:

- излагать способ получения ответа, если он может доказать правильность и полноту ответа другим путем;
- сравнивать свой метод решения с другими возможными методами, в том числе с точки зрения краткости, красоты и пригодности для решения других задач.

Докладчик обязан рассказывать решение в вежливой, корректной форме; критикуя действия оппонента, не допускать критики его личности, обращаться к оппоненту только на «Вы».

3.2 Оппонирование

Пока доклад не окончен, оппонент может задавать вопросы только с согласия докладчика, но имеет право просить повторения части решения и разрешать докладчику не доказывать какие-либо очевидные с точки зрения оппонента факты. После окончания доклада оппонент имеет право задавать вопросы докладчику. Если в течение минуты оппонент не задал ни одного вопроса, то считается, что у него нет вопросов. Если докладчик в течение минуты не начинает отвечать на вопрос, то считается, что у него нет ответа.

В качестве вопроса оппонент может:

- потребовать у докладчика повторить любую часть доклада;
- попросить уточнения любого из высказываний докладчика, в том числе: (а) попросить дать определение любого термина («*Что Вы понимаете под...*»); (б) переформулировать утверждение докладчика своими словами и попросить подтверждения («*Правильно ли я понимаю, что Вы утверждаете следующее: ...*»);
- попросить докладчика доказать сформулированное тем неочевидное необщеизвестное утверждение (в спорных случаях вопрос об известности или очевидности решает жюри; во всяком случае, известными считаются факты, изучающиеся в общеобразовательной школе);
- после ответа на вопрос выразить удовлетворенность или мотивированную неудовлетворенность ответом.

Если оппонент считает, что докладчик тянет время, придумывая решение у доски, или что существенная часть доклада не является изложением решения обсуждаемой задачи, он имеет право (но не ранее, чем через 10 минут после начала доклада) попросить докладчика предъявить ответ (если таковой в задаче подразумевается) или план дальнейших рассуждений.

Оппонент обязан:

- формулировать свои вопросы в вежливой, корректной форме, обращаться к докладчику только на «Вы»;
- критикуя доклад, не допускать критики докладчика;
- повторять и уточнять свои вопросы по просьбе докладчика или жюри.

По итогам доклада и ответов на вопросы оппонент имеет право дать свою оценку докладу и обсуждению в одной из следующих форм: (а) признать решение правильным; (б) признать решение (ответ) в основном правильным, но имеющим недостатки и/или пробелы с обязательным их указанием; (в) признать решение (ответ) неправильным с указанием ошибок в обоснованиях ключевых утверждений доклада или контрпримеров к ним (или ответу), или указанием существенных пробелов в обоснованиях или плане решения. Если оппонент согласился с решением, он и его команда в этом раунде больше не участвуют.

Если оппонент имеет контрпример, опровергающий решение докладчика в целом, и этот контрпример сам является решением задачи (такое бывает, например, в случаях, когда вопрос задачи звучит как «*Можно ли ...?*», «*Верно ли, что ...?*» и т.п.), то оппонент имеет право заявить: «*Я с решением не согласен, у меня есть контрпример*», но сам контрпример пока докладчику не предъявлять (хотя жюри имеет право потребовать от оппонента предъявления контрпримера в письменном виде, чтобы убедиться в корректности заявления оппонента). В

этом случае, если докладчик не изменит своего решения в течение минуты или после взятого командой перерыва, оппонент получает право предъявить докладчику упомянутый контрпример, причем докладчик и его команда уже не имеют права менять решение или ответ.

Аналогично, если решение требует перебора случаев, оппонент имеет право заявить: «*Я с решением не согласен, рассмотрены не все случаи*», не указывая пока докладчику явно, какой именно случай не рассмотрен. Дальнейшие действия докладчика, жюри и оппонента такие же, как в ситуации с контрпримером.

3.3 Участие жюри в обсуждении

После окончания диалога докладчика и оппонента жюри задает свои вопросы. При необходимости оно может вмешиваться и раньше.

3.4 Выступающие и команда

Докладчик и оппонент могут обращаться к своим капитанам с просьбой о замене или перерыве для консультации. Другое общение между командой и докладчиком (оппонентом) допускается только во время полуминутного перерыва, который любая команда может взять в любой момент (при этом соперники тоже могут пользоваться этим временем). Каждая команда может взять в течение одного боя не более 6 полуминутных перерывов (см. также ниже пункт «Число выходов к доске»).

3.5 Начисление баллов

Каждая задача оценивается в 12 баллов, которые по итогам раунда распределяются между докладчиком, оппонентом и жюри. Если докладчик, не опираясь существенно на наводящие вопросы и иные соображения жюри и/или оппонента, рассказал правильное и полное решение, все 12 баллов достаются ему. Если же в решении были выявлены «дыры» (пробелы), то жюри по окончании дискуссии определяет их стоимость. После этого оппонент, как правило, сразу получает половину стоимости обнаруженных им дыр. Если некоторые «дыры» были в ходе дискуссии полностью или частично закрыты, соответствующая часть остатка общей стоимости дыр распределяется между докладчиком и оппонентом пропорционально их вкладу в закрытие «дыр». При этом вкладом оппонента может признаваться не только закрытие им дыры (в случае полной или частичной перемены ролей), но и помощь докладчику в закрытии дыр путем высказанных по окончании доклада наводящих соображений. Все оставшиеся баллы жюри забирает себе.

Если не было полной перемены ролей, то оппонент не может получить больше 6 баллов.

Если ошибки или пробелы в докладе указаны самим докладчиком и не устранены его командой, то оппонент получает за них баллы так, как если бы он сам нашел эти недостатки. В частности, если, получив отказ от вызова, капитан вызывающей команды сразу признается, что у его команды нет решения, то команда соперников получает 6 баллов за оппонирование (которое в этом случае могло бы состоять из одной фразы: «У Вас нет решения»), а вызов признается некорректным. Докладчик и оппонент в этом случае не назначаются и выходы к доске не засчитываются.

4 Перемена ролей. Некорректный вызов. Порядок вызовов.

Если по ходу дискуссии жюри установило, что оппонент доказал отсутствие у докладчика решения и ранее не произошел отказ от вызова, то возможны два варианта. Если вызов на этот раунд был принят, то оппонент получает право (но не обязан) рассказать свое решение. Если оппонент взялся рассказывать свое решение, то происходит полная перемена ролей: бывший

докладчик становится оппонентом и может зарабатывать баллы за оппонирование. Если же вызов на этот раунд не был принят, то говорят, что вызов был некорректным. В этом случае перемены ролей не происходит, а команда, вызывавшая некорректно, должна снова вызывать соперника в следующем раунде. Во всех остальных случаях в следующем раунде вызывает та команда, которая была вызвана в текущем раунде.

Принятый вызов всегда считается корректным!

Если же оппонент не доказал, что у докладчика нет решения, но выявил в предложенном решении некоторые конкретные недостатки, то, если ранее не произошел отказ от вызова и вызов на этот раунд был принят, оппонент получает право (но не обязан) устранить все (или некоторые) из этих недостатков («залатать дыры»). Такое же право оппонент получает, если он доказал, что у докладчика нет решения, но отказался рассказывать собственное решение. Если оппонент взялся «залатывать дыры», то происходит частичная перемена ролей: оппонент обязан сформулировать предварительно, что именно он будет делать (например, разбирать такой-то неразобранный докладчиком случай, доказывать такое-то недоказанное докладчиком утверждение или что-либо еще), а бывший докладчик становится оппонентом и может зарабатывать баллы за оппонирование сформулированных утверждений.

При проверке корректности вызова частичная перемена ролей невозможна.

Обратной перемены ролей ни в каком случае не происходит!

5 Число выходов к доске

Каждый член команды имеет право выйти к доске в качестве докладчика или оппонента не более двух раз за бой. Команда имеет право не более трех раз за бой заменять докладчика или оппонента, причем каждый раз выход засчитывается как тому, кого заменили, так и тому, кто вышел на замену. Кроме того, при замене время, отведенное команде на перерывы, уменьшается на 1 минуту (эту минуту можно использовать непосредственно перед заменой, а можно и не использовать — в последнем случае команда соперников тоже не имеет права пользоваться ею).

6 Капитан

Во время боя только капитан может от имени команды обращаться к жюри и соперникам: сообщать о вызове или отказе, просить перерыв и т. д. Он имеет право в любой момент прекратить доклад или оппонирование представителя своей команды. Если капитан у доски, он оставляет за себя заместителя, исполняющего в это время обязанности капитана. Имена капитана и заместителя сообщаются жюри до начала решения задач.

Во время решения задач главная обязанность капитана — координировать действия членов команды так, чтобы имеющимися силами решить как можно больше задач. Для этого капитан распределяет между членами команды задачи для решения (с учетом их пожеланий), следит, чтобы каждая задача кем-то решалась, организует проверку найденных решений. Капитан заранее выясняет, кто будет докладчиком или оппонентом по той или иной задаче и определяет всю тактику команды на предстоящем бое.

7 Жюри

Жюри является верховным толкователем правил боя. В случаях, не предусмотренных правилами, оно принимает решение по своему усмотрению. Решения жюри являются обязательными для команд.

Во время решения командами задач всякое существенное разъяснение условий задач, данное одной из команд, должно быть в кратчайшее время сообщено жюри всем остальным командам.

Жюри может снять вопрос оппонента (например, если он не по существу), прекратить доклад или оппонирование, если они затягиваются. Если жюри не может быстро разобраться в решении, оно может с согласия обоих капитанов выделить своего представителя, который продолжит обсуждение задачи совместно с докладчиком и оппонентом в другом помещении. При этом бой продолжается по другим задачам, а очки по этой задаче начисляются позже.

Жюри ведет протокол боя. Если одна из команд не согласна с принятым жюри решением по задаче, она имеет право немедленно потребовать перерыв на несколько минут для разбора ситуации с участием Председателя жюри. После начала следующего раунда счет предыдущего раунда изменен быть не может.

Жюри следит за порядком. Оно может оштрафовать команду за шум, некорректное поведение, общение со своим представителем, находящимся у доски.

Жюри обязано мотивировать свои решения, не вытекающие непосредственно из правил боя.

8 Отказ от вызова. Окончание боя.

В любой момент боя команда, которая должна вызывать, может отказаться делать это (обычно это происходит, когда у команды больше нет решенных задач, если она не хочет делать вызов, который может оказаться некорректным). Тогда другая команда получает право (но не обязана) рассказывать решения оставшихся задач. При этом команда, отказавшаяся делать вызов, может выставлять оппонентов и получать баллы только за оппонирование, но рассказывать решения она уже не имеет права, даже если они у нее и появятся (то есть после отказа от вызова не происходит ни полной, ни частичной перемены ролей).

Бой заканчивается, когда не остается необсужденных задач либо когда одна из команд отказалась от вызова, а другая команда отказалась рассказывать решения оставшихся задач.

Экономический бой

Задания

Задача 1

На рынке синих ворон действуют N (необязательно одинаковых) фирм, предельные издержки каждой из них пропорциональны ее выпуску. Нигачрок знает это, а также то, что спрос на данном рынке линеен, но не знает конкретных параметров функций издержек и функции спроса. Он подозревает, что все фирмы вступили в сговор и действуют как монополист (считаем, что в отсутствие сговора фирмы ведут себя как совершенные конкуренты). Чтобы проверить это, Нигачрок решил ввести потоварный налог по ставке t . Когда он увидел, как изменился объем продаж и цена синих ворон после введения налога, он смог точно определить, есть ли на рынке сговор.

Есть ли на рынке сговор?

Задача 2

Ирина Спартаковна накрывает столы в столовой с помощью двух дежурных — Димы и Ксюши. Технология накрытия столов у дежурных одинакова; у каждого из них функция издержек имеет вид $TC = q^3 - q^2 + 2014q$ (число накрытых столов может быть нецелым).

Допустим, Ирине Спартаковне нужно накрыть $Q > 0$ столов. Как следует разделить этот выпуск между двумя дежурными, чтобы произвести его с наименьшими издержками? При каждом Q найдите все оптимальные варианты.

Примечание: задачу можно решить без использования производной.

Задача 3

Представим себе мир, состоящий из трех стран — Е, Б и Р. Рассмотрим рынок камамбера — товара, который производится только в стране Е. Функция предложения этого товара в стране Е имеет вид $Q = P$. Для простоты будем считать, что функции спроса на камамбер в странах Е, Б и Р одинаковы и описываются уравнением $Q = 24 - P$.

Представим себе, что самолет страны Е был сбит над территорией страны Р, что привело к заметному охлаждению отношений между странами. Обидевшись, страна Р решила полностью запретить ввоз камамбера из страны Е. Поскольку импорт из страны Б не был запрещен, предприимчивая фирма Ф из страны Б решила покупать камамбер в стране Е, наклеивать на него этикетку «Made in Б», и перепродавать товар в страну Р. Фирма Ф обладает рыночной властью и может сама назначать как цену, по которой она закупает товар в стране Е, так и цену, по которой она продает товар в страну Р. Будем считать, что издержки фирмы Ф равны нулю.

Найдите цены, по которым фирма Ф будет покупать и продавать товар в равновесии, а также мировой объем производства и объемы потребления товара в трех странах.

Задача 4

Преподаватели до ночи составляли задачи для экономического боя ЛЭШ. Где-то около 2 часов ночи работа была закончена, и преподаватели решили не ночевать в лагере «Клён», а поехать в гостиницу «Задонск», где они могли бы хоть чуть-чуть выспаться. В гостиницу можно добраться двумя способами: на такси и на машине Нигачрока. Спрос преподавателей задается функцией $q^d = 100 - p$, где p — цена за километр пути. Ценообразование на рынке ночных перевозок преподавателей устроено следующим образом: компания, владею-

щая такси, назначает цену за километр пути p , а Нигачрок говорит, сколько километров готов проехать он сам (q). Рыночная цена одного километра пути устанавливается на уровне $\min\{100 - q, p\}$, Нигачрок везет преподавателей заявленные q километров, а таксисты покрывают остаточный спрос по установившейся рыночной цене (иными словами, довозят преподавателей до гостиницы, если Нигачрок уже этого не сделал). Все перевозчики максимизируют прибыль и несут издержки 50 HS€ за километр пути.

Найдите равновесие Нэша в этой игре.

Задача 5

В командной экономике Бургундия есть кокосовые пальмы и рыбные озера. Созревшие кокосы падают с пальм, и собрать их не составляет никакого труда. Бургундчане очень любят рыбу, но не любят кокосы, поэтому каждый год они продают весь урожай кокосов (равный 3 тоннам) на мировом рынке, а на вырученные средства закупают рыбу. В настоящий момент и кокосы, и рыба на мировом рынке стоят по 1 HS€ за тонну (HS€ — это национальная валюта Бургундии). В Бургундии есть одна отрасль — рыбная. Если фирмы нанимают L человек, то отрасль произведет $Y = 2\sqrt{L}$ тонн рыбы. Президент Бургундии оценил, что функция благосостояния бургундчан имеет следующий вид: $U(C, L) = 2\sqrt{C} - \sqrt{L}$, где C — это совокупное потребление бургундчанами рыбы (произведенной как внутри страны, так и купленной за рубежом). Президент хочет, чтобы его граждане были максимально счастливыми, и согласно этому выбирает, сколько людей должно работать.

Найдите ВВП Бургундии, импорт, совокупное потребление и занятость в условиях, описанных выше, а также при удвоении мировой цены кокосов.

Задача 6

В ЛЭШ-2114 проблема дефицита преподавателей при сдаче задач решается с помощью рыночного механизма. Спрос всех девочек на время преподавателей задается уравнением $Q_1 = 10 - 2p_1$, спрос всех мальчиков — уравнением $Q_2 = 5 - p_2/2$. Со стороны предложения на рынке конкурируют два олигополиста с нулевыми издержками — Надя и Петя, которые максимизируют прибыль. Сначала Надя объявляет разные цены для девочек и для мальчиков, потом Петя объявляет единую цену для всех, дальше каждый потребитель покупает у того, у кого дешевле (или у Пети, если цены одинаковы). Какие цены назначат Надя и Петя?

Мастер-класс

Кривая предложения фирмы

Задача 1

Известно, что фирма, действующая на рынке совершенной конкуренции, при любой цене ниже 16 ден. ед. прекращает производство в краткосрочном периоде и несёт при этом убытки в размере 50 ден. ед., а при цене 36 ден. ед. максимальная прибыль данной фирмы равна нулю. Считая функцию предложения данной фирмы линейной, определите:

- при каком выпуске продукции данная фирма получает нулевую экономическую прибыль;
- функцию общих издержек для данной фирмы в краткосрочном периоде;
- величину максимальной прибыли фирмы при цене 40.

Источник – муниципальный этап всероссийской олимпиады в г.Москва, 2011 год

Задача 2

На рынке совершенной конкуренции с функцией спроса $Q=2011-p$, вход и выход на который свободны, работают фирмы, каждая из которых имеет долгосрочную функцию издержек

$$TC = \begin{cases} q^2 + 16, & \text{если } q > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Сколько фирм будет на рынке в долгосрочном периоде и сколько каждая из них будет производить? Какой знак будет иметь прибыль каждой из фирм?

Источник – муниципальный этап всероссийской олимпиады в г.Москва, 2011 год

Задача 3

Рассмотрите совершенно конкурентную отрасль, где действуют 50 фирм с одинаковыми технологиями производства товара. Совокупные издержки одной фирмы описываются функцией $TC(q) = q^2$, где q — объем производства. Спрос потребителей на продукцию данной отрасли задается функцией $Q^D(p) = 1000 - 100p$, где p — цена единицы готовой продукции. Правительство рассматривает два варианта налогообложения производителей. Согласно первому варианту предполагается ввести 75%-ный налог на прибыль, а согласно второму варианту — 75%-ный налог на выручку от реализации произведенной продукции. Какой из предложенных вариантов принесет большую сумму налоговых платежей в госбюджет?

Источник – олимпиада ВШЭ, 2009 год

Задача 4

На совершенно конкурентном рынке функция годового предложения была задана уравнением $Q^s = -80 + 2P$, а функция годового рыночного спроса имеет вид $Q^d = 340 - P$. Годовая прибыль каждой из 100 действующих на этом рынке фирм была равна 60 рублей. Поскольку производство выпускаемого фирмами товара создает отрицательный внешний эффект, государство решило взимать потоварный налог в размере 15 рублей за каждую проданную единицу продукции. Кроме того, был введен лицензионный сбор в размере 55 рублей, который каждая фирма должна была ежегодно платить за право продолжить выпуск «вредного» товара. Определите:

- Параметры рыночного равновесия (цену и равновесный объем), а также объем выпуска каждой фирмы до вмешательства государства;
- Новые параметры рыночного равновесия после вмешательства государства, а также на сколько процентов изменится прибыль одной фирмы. При расчете считать, что количество фирм не меняется.

Источник – московская городская олимпиада по экономике, 2007 год

Задача 5

На рынке товара Z действуют 100 идентичных фирм; изначально рыночная функция спроса описывается уравнением $Q^d = 550 - P$, а рыночная функция предложения — уравнением $Q^s = 2P - 80$.

Производство данного товара сопровождается отрицательным внешним эффектом, и поэтому государство решило ввести на данном рынке корректирующий налог. Упор был сделан именно на сокращение выпуска, и налог ввели несколько необычный: так, при производстве q единиц продукции фирма должна была за каждую из них заплатить в бюджет $10q$ ден. ед. Определите, на сколько в результате действий государства сократился объем производства товара Z, а также сумму налоговых сборов, полученную государством.

Источник – всероссийская олимпиада, 2011 год

Задача 6

Функция издержек совершенно конкурентной фирмы описывается уравнением

$$TC(Q) = \begin{cases} 0,2Q^2 + 10Q + 20, & Q \leq 8 \\ 0,2Q^2 + 100, & Q > 8 \end{cases}$$

- При какой минимальной рыночной цене фирма останется на рынке в краткосрочном периоде?
- Интерпретируйте ответ графически.

Источник – региональный этап всероссийской олимпиады, 2011 год

Задача 7

Фирма Альфа реализует товар А на рынке совершенной конкуренции. Ее общие издержки имеют вид: $TC = 0,2q^2$, где q — выпуск фирмы, единиц продукции в месяц. На рынке товара А действует следующая система лицензирования: если выпуск фирмы не превышает 100 единиц продукции в месяц, то никакие лицензионные сборы не взимаются. При превышении этого объема фирма обязана платить фиксированный лицензионный сбор в размере 3125 рублей в месяц. Выведите функцию предложения фирмы Альфа.

Источник – региональный этап всероссийской олимпиады, 2013 год

Задача 8

Функция издержек совершенно конкурентной фирмы «The Gap» имеет вид $TC = 0,5Q^2$, однако фирма, в силу технологических ограничений, не может производить объемы выпуска из интервала (1;3).

- Найдите функцию предложения фирмы и постройте ее график.

б) Фирма рассматривает возможность усовершенствования технологии, в результате которого функция издержек не изменится, однако станет возможным производство любого неотрицательного объема выпуска. При какой цене на продукцию фирмы ее готовность заплатить за такое усовершенствование максимальна? Чему равна эта максимальная готовность платить?

Источник – всероссийская олимпиада, 2011 год

Лэш-2014. Ботский мастер-класс по теме: «Решение задач про КПВ методом векторной суммы».

Подготовил: Егор Иванов.

Упражнение 1. Герман Минковский¹ — экономист.

Пусть $A(a;b)$ и $B(c;d)$ — две точки на плоскости. Суммой этих точек назовем точку C с координатами $(a+c;b+d)$. Пусть теперь A и B — некоторые множества точек на плоскости. Векторной суммой (или суммой Минковского) этих множеств называется множество C , которое состоит из всех точек плоскости, которые можно получить как сумму некой точки из A и некой точки из B . Найдите векторные суммы следующих множеств:

(а) Прямой $x = 0$ и прямой $y = 0$;

(б) Прямой $x = 1$ и прямой $x + y = 1$;

(в) Круга с центром в нуле и радиусом 1 с самим собой;

(г) Треугольника, ограниченного осями и прямой $x + 2y = 2$, и треугольника, ограниченного осями и прямой $2x + y = 2$. Подсказка: подумайте, где встречается векторная сумма в экономике ☺

Упражнение 2.

Получите геометрически суммарную КПВ для функций:

а) $y_1(x) = \sqrt{100 - x^2}$ и $y_2(x) = 10 - x$

б) $y_1(x) = 10 - \sqrt{x}$ и $y_2(x) = 10 - \frac{1}{10}x$

Упражнение 3.

Есть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Доказать, что сумма $k * \vec{a} + (1 - k)\vec{b}$, где k — число от 0 до 1, является множеством точек, соединяющих концы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Задача 1.

Два школьника решают задачи и тесты, у каждого из них есть по одному часу времени.

Первый школьник решает задачи со скоростью 3 задачи в час, а тесты - со скоростью 1 тест в час.

Второй школьник решает задачи со скоростью 1 задача в час, а тесты - со скоростью 3 теста в час.

Но это - если они решают отдельно друг от друга. Если же они садятся решать вместе, то задачи они решают со скоростью 5 задач в час, а тесты - со скоростью 5 тестов в час.

Время они могут делить как угодно: например, сначала вместе полчаса порешать задачи, а затем первый свои оставшиеся полчаса самостоятельно решает задачи, а второй 15 минут самостоятельно решает задачи, а 15 минут самостоятельно решает тесты.

Требуется построить их совместную кривую производственных возможностей (для каждого возможного количества решённых задач она показывает, какое максимальное количество тестов они смогут решить).

Задачи и тесты предполагаются бесконечно делимыми:)

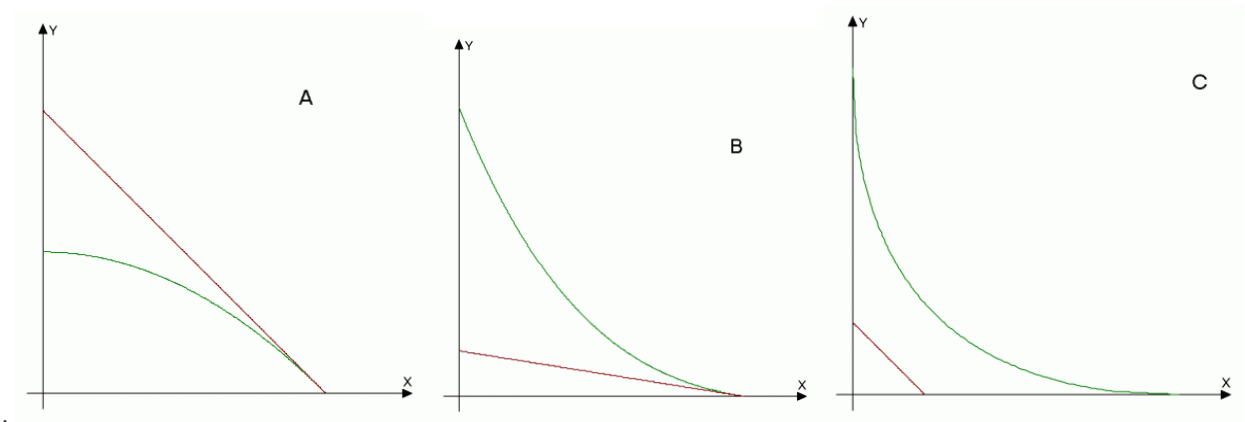
¹ Герман Минковский — выдающийся немецкий математик второй половины XIX века, создавший геометрическую теорию чисел.

Задача 2.

Дядя Фёдор купил чудо-комбайн, который в качестве ресурса использует молоко, а на выходе даёт квас и лимонад. Точнее, не один, а целых два таких комбайна – разных марок. На рисунке А изображены КВП этих двух комбайнов в координатах квас/лимонад; каждая КПВ – в расчёте на 1 литр молока. Если же влить в комбайн меньше литра молока, то количество продукта уменьшается.

Каждый комбайн работает так: сначала Дядя Фёдор выбирает точку на КПВ комбайна (соответствующей 1 литру), а затем вливает в комбайн $1/k$ литров (k – любое действительное число, не меньшее единицы), и получает в k раз меньше каждого продукта, чем в указанной им точке. У Дяди Фёдора всего 1 литр молока, и он распределяет его между двумя комбайнами.

Требуется нарисовать общую КВП от использования двух комбайнов. А потом проделать то же самое для случаев В и С.



Задача 5. [Комбайн][20 баллов]
Фермер владеет двумя полями, на которых можно выращивать две давно полюбившиеся олимпиадникам культуры — Икс (X) и Игрек (Y). Информация о полях приведена в таблице:

Поле	Площадь, га	Урожайность X	Урожайность Y
Первое	10	1	2
Второе	20	2	1

Под урожайностью понимается количество соответствующего продукта (в тоннах), которое можно будет получить с одного гектара посевов в конце сезона, длящегося 100 дней. Фермер может разделить каждое поле между двумя культурами в любой пропорции.

а) (5 баллов) Постройте кривую производственных возможностей фермера в координатах ($X; Y$).

б) (15 баллов) Фермер задумывается о покупке нового комбайна, использование которого позволит увеличить урожайность культуры Y . Если комбайн проработает на некотором поле t дней, урожайность культуры Y на этом поле увеличится на $(0,02 \times t)$ т/га. Комбайн не может работать на двух полях одновременно, и если фермер купит его, то он сможет распределять время работы комбайна между полями в любой пропорции (в частности, t не обязательно целое число). Какова будет КПВ фермера, если он приобретет комбайн?

Вступительный тест ЛЭШ-2014

Ваши ответы на этот тест нужны нам, чтобы определить, в какой группе Вам будет наиболее комфортно учиться, и чтобы сформировать программу обучения этой группы. Это не экзамен и не соревнование, а наша попытка понять, что Вы уже знаете, а чему Вас еще нужно научить. Результаты этого теста не будут обнародованы, написавшие его лучше всех не будут награждены, а худшие не будут наказаны, поэтому мы просим Вас не жульничать при выполнении заданий и не ставить ответы наугад (лучше просто не отвечать на вопрос, если не знаете как). Не пугайтесь, если в заданиях встретятся непонятные термины и формулировки: возможно, Вы просто еще их не проходили.

В вопросах с выбором вариантов может быть один или несколько правильных ответов, которые нужно **обвести в кружок**. Если вопрос сформулирован в единственном числе (например, *выберите верный вариант*), то правильный ответ точно один. В тех вопросах, где варианты не предлагаются, нужно **подписать ответ рядом с вопросом**. Решения приводить не нужно. Полностью правильный ответ на каждый вопрос оценивается в 1 балл. Заполнение полей «Фамилия, имя» и «Класс» также оцениваются по 1 баллу.

Время выполнения — 1 час. Удачи!

Фамилия, имя:

Класс (который Вы закончили в 2014 году) :

Часть М

М.1. Сколько корней имеет уравнение $2x^3 - 6x^2 + 8 = 0$?

- 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

М.2. Какие из этих уравнений задают положительную зависимость между x и y ?

- 1) $y = 2x + 1$; 2) $y = -1 - 10/x^3$; 3) $y + 5\sqrt{x} = 10$; 4) $y = -1/x^2$.

М.3. Множество точек, удовлетворяющих уравнению $12xy = 10$, является:

- 1) прямой; 3) параболой;
2) эллипсом; 4) гиперболой.

М.4. Ординатой вершины параболы $y = (99 - x)(101 - x) - 2$ является число:

- 1) 100; 2) -3; 3) -1; 4) $99 \cdot 101 - 2$.

М.5. Какая из этих бесконечных последовательностей не имеет конечной суммы?

- 1) $1, 1/2, 1/(2 \cdot 3), 1/(2 \cdot 3 \cdot 4), \dots$; 3) $1, -1/2, 1/4, -1/8, \dots$;
2) $1, 1/2, 1/4, 1/8, \dots$; 4) $1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots$.

М.6. Найдите максимальное значение функции $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 20$ на отрезке $[-3; 3]$.

М.7. Угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \frac{2x-3}{5-4x}$ в точке $x = 1$ равен

- 1) -2; 2) 6; 3) 2; 4) -6.

М.8. Вам предлагают сыграть в игру «Ловля уток». Ваша задача — поймать утку в сачок. Если за 2 попытки Вы поймаете хотя бы одну утку, то Вы получите приз в 4 рубля, если же нет, то вы ничего не выигрываете и ничего не проигрываете. Найдите математическое ожидание вашего выигрыша, если вероятность поймать утку во время каждой из попыток равна $1/2$.

Часть Л

Л.1. Выберите верные утверждения:

- 1) $(16; 17] \cup [0; 15] \subset (0; +\infty)$;
- 2) $[-1; 1] \in \mathbb{Q}$;
- 3) Если столица Италии Париж, то читающему это меньше 15 лет;
- 4) В группе из 30 человек ровно 20 говорит и на суахили, и на клингонском. Тогда 10 из 30 не говорят ни на суахили, ни на клингонском.

Л.2. Ляк подклякивается ко всем, кто сегодня надел фуфыру. Фуфыру сегодня надели все мряки и 2 бряка. Какие утверждения верны?

- 1) Хотя бы к одному бряку сегодня подклякает Ляк.
- 2) Ляк сегодня обязательно будет подклякиваться ко всем мрякам.
- 3) Если Ляк сегодня не подклякивался к Васе, то Вася точно не мряка и не бряк.
- 4) Если Ляк сегодня подклякивался к Васе, то не факт, что Вася сегодня в фуфыре.

Часть Ми

Ми.1. Пусть издержки фирмы имеют вид:

$$TC = \begin{cases} 7Q, & \text{при } Q < 4 \\ (Q-3)^2 + 27, & \text{при } Q \geq 4 \end{cases}$$

Выберите все верные утверждения:

- 1) $AFC(9) > 2$;
- 2) $\min AC = 6$;
- 3) $\min AVC = 6$;
- 4) MC не убывает при $Q \in [1; 7]$;
- 5) $MC \geq AVC$ при любом $Q > 0$.

Ми.2. Для совершенно конкурентной фирмы, максимизирующей прибыль, всегда верно, что:

- 1) $P = MC$ в точке оптимума;
- 2) если оптимальное $Q^* > 0$, а MC везде определены, то $AVC(Q^*) \leq MC(Q^*)$;
- 3) прибыль фирмы не изменяется в зависимости от уровня выпуска;
- 4) она воспринимает цену как заданную и, исходя из этого, выбирает оптимальный выпуск.

Ми.3. Кетчуп является дополняющим товаром для хот-догов. Что, скорее всего, произойдет на рынке томатного сока, если цена на хот-доги вырастет в результате сокращения их предложения?

- 1) равновесная цена на томатный сок вырастет, а равновесное количество снизится;
- 2) и равновесная цена, и равновесное количество вырастут;
- 3) равновесная цена на томатный сок снизится, а равновесное количество вырастет;
- 4) и равновесная цена, и равновесное количество снизятся.

Ми.4. Индекс Херфиндаля-Хиршмана равен сумме квадратов долей всех фирм на рынке. Для рынков с какой структурой характерно наиболее низкое значение этого индекса?

- 1) совершенной конкуренции;
- 2) олигополии;
- 3) монополии;
- 4) значение индекса не связано со структурой рынка.

Ми.5. Спрос и предложение на рынке заданы как $Q_d(P) = 10 - P$ и $Q_s(P) = P$. Пусть сначала спрос растет до уровня $Q_d(P) = 20 - 2P$, а затем предложение падает до уровня $Q_s(P) = P/2$. Как при этом меняется ставка потоварного налога, максимизирующая налоговые сборы?

- 1) сначала растет, а затем падает;
- 2) оба раза не меняется;
- 3) оба раза падает;
- 4) сначала не меняется, а затем растет.

Ми.6. По 2-летней облигации в конце первого года будет выплачена премия в размере 10% от номинала, а в конце 2-ого года будет выплачен сам номинал, равный 1210 рублей. Чему равна нынешняя стоимость облигации, если ставка процента тоже равна 10%?

- 1) 1110 рублей;
- 2) 1331 рубль;
- 3) 1121 рубль;
- 4) 1210 рублей.

Ми.7. Спрос на продукцию монополиста равен $Q = 10 - P$, а его издержки равны $TC(Q) = Q^2 + 2Q$. Какую минимальную величину s должна превышать потоварная субсидия, чтобы оптимум монополиста находился на неэластичном участке спроса?

- 1) 7;
- 2) 9;
- 3) 12;
- 4) 15.

Ми.8. Совершенно конкурентная фирма имеет функцию издержек $TC(q) = 2q^2 + 1$. Если рыночная цена равна 4, то чему равен оптимальный выпуск фирмы?

Ми.9. Предположим, что потребительская функция полезности имеет вид: $U(q_1, q_2) = \min(q_1, 2q_2)$. Цены $p_1 = 5$, $p_2 = 10$ и потребительский доход $M = 1000$. Каким будет оптимальное потребление q_1 ?

Часть Ма

Ма.1. Известно, что потребление в стране равно 6 денежным единицам, из которых 2 денежные единицы импортируются, государственные закупки равны 2 и состоят только из отечественных товаров и услуг, а инвестиции равны 3. Если чистый экспорт равен 1, то чему равен экспорт?

- 1) 3;
- 2) 1;
- 3) -1;
- 4) нельзя определить.

Ма.2. К каким последствиям привела массовая эпидемия чумы в Европе в середине 14 в.?

- 1) к росту реального ВВП;
- 2) к росту реальных зарплат;
- 3) к инфляции;
- 4) ни к чему из вышеперечисленного.

Ма.3. Предположим, что в закрытой экономике, где потребление равно $C = 400 + 0,6Y$, инвестиции равны $I = 0,2Y + 500$, и от дохода зависят только потребление и инвестиции, произошло увеличение государственных закупок $\Delta G = 100$. На сколько увеличится потребление C ?

Ма.4. Весной 2014 г. обменные курсы доллара и евро составляли 36 руб./доллар и 50 руб./евро. Летом они упали до 35 руб./доллар и 47 руб./евро. Какое количество рублей можно получить летом, если совершить два обмена: первый — весной, обменяв 100 рублей на набор из долларов и евро, второй — летом, обменяв набор обратно в рубли? Выберите все верные ответы.

- 1) 94;
- 2) 96;
- 3) 98;
- 4) 100.

Ма.5. Пусть каждый месяц в экономике 5% работающих теряют свою работу, а 45% безработных находят себе работу. Чему тогда в процентах равен равновесный уровень безработицы (равновесным назовем такой уровень безработицы, который со временем не будет изменяться)?

Ма.6. Номинальный ВВП каждый год растет на 1/3, инфляция каждый год равна 10%. Сколько лет потребуется для того, чтобы реальный ввп вырос как минимум вдвое?

- 1) 3;
- 2) 4;
- 3) 5;
- 4) 6

Часть И

И.1. Что из перечисленного может выполняться, если в игре участвуют два игрока, у каждого из которых по 2 стратегии?

- 1) Не существует равновесий по Нэшу в чистых стратегиях
- 2) Все наборы стратегий являются равновесиями по Нэшу
- 3) У каждого из игроков обе стратегии строго доминируют друг друга
- 4) Равновесие по Нэшу неэффективно по Парето

И.2. Авдотья и Иннокентий играют в «Камень-ножницы-бумага» — как известно, камень (К) бьет ножницы (Н) и проигрывает бумаге (Б), а ножницы выигрывают у бумаги. Каждый из игроков получает полезность 1 от выигрыша и -1 от проигрыша. Ничья приносит всем нулевую полезность. Найдите все равновесия по Нэшу (в чистых стратегиях) в этой игре.

Часть О

О.1. Выберите верное утверждение.

- 1) Я точно должен учиться в «продвинутой» группе.
- 2) Я сомневаюсь, в какой группе мне лучше быть.
- 3) Я точно должен учиться в «начальной» группе.
- 4) Что-то мне уже домой хочется.

О.2. Напишите или нарисуйте здесь еще что-нибудь, если хотите.

