

Задача “Деловой подход”

Британская Ост-Индская торговая компания, возглавляемая лордом Катлером Беккетом, закупает пряности в индийских колониях Британской империи и по морю доставляет их в метрополию, то есть в Англию. В распоряжении компании находится собственный флот, состоящий из $B = 100$ кораблей (от англ. Britain): торговых и военных (в количествах t_B и w_B соответственно). Путь торговых судов лежит через Индийский океан, в котором на них периодически нападают карибские пираты, имеющие стоянку на Мадагаскаре. Пираты грабят, а затем угоняют либо сжигают невооружённые торговые суда, чем изрядно досаждают Ост-Индской компании. Поэтому борьбой с пиратами по всему Индийскому океану занимаются военные корабли, которые, однако, не приспособлены для перевозки грузов. Военные корабли компании пираты не атакуют, поскольку не могут тягаться с ними боевой мощью. Кораблями компания не владеет, они безвозмездно предоставляются ей в долговременное пользование британской короной. В случае утраты любого из кораблей флота его место занимает новое судно, причём средства на строительство новых кораблей субсидируются королевой: Её Величество является одним из акционеров, а потому заинтересована в коммерческом успехе компании.

Торговое судно совершает полный рейс Англия – Индия – Англия за два года. Себестоимость пряностей, вывозимых в трюмах такого судна, составляет $c = 500$ фунтов стерлингов, в Англии они продаются с наценкой $m = 2400\%$. По статистике, число успешных торговых рейсов относится к числу рейсов, загубленных пиратами, так же как численность военных кораблей в океане относится к численности пиратских кораблей. Определяя количество торговых и военных кораблей во флоте Британской Ост-Индской компании, лорд Беккет стремится максимизировать её ожидаемую прибыль. Он также исходит из данных капитанов, которые заметили, что число пиратских кораблей p в океане всегда равно исходному количеству торговых судов: где нажива, там и пираты.

- (a) [7 баллов] Сколько кораблей компании распорядится вооружить лорд Беккет?
- (b) [1 балл] Сколько потерянных судов ему следует ожидать за двухлетний срок? Округлите до целых.
- (c) [1 балл] Какова величина ожидаемой прибыли компании за двухлетний срок?
- (d) [2 балла] Если бы не пиратство, компания не тратила бы ресурсы флота на борьбу с ним, и её *потенциальная* прибыль была бы больше. Какой процент от этой потенциальной прибыли реально получает компания?

Для того чтобы снизить риск нападения пиратов моряки додумались рисовать на бортах торговых судов ложные порты, имитирующие пушечные порты военных кораблей. В половине случаев эта уловка отпугивает пиратов, отчего вероятность успешности рейса возрастает в 2 раза.

- (e) [3 балла] Какой процент (округлите до целых) от *потенциальной* прибыли станет получать компания, если на всех торговых судах будут нарисованы ложные порты и лорд Беккет учтёт этот факт, когда будет принимать решение о составе флота?

Вслед за Британской возникает и Голландская Ост-Индская торговая компания (впоследствии она станет первой в истории компанией, разместившей акции на бирже). Компания импортирует пряности в Голландскую республику из индийских колоний Голландии и имеет такие же условия для ведения бизнеса, как и Британская компания, за исключением одного: она получает от голландской короны лишь $H = 75$ (от англ. Holland) кораблей. Количество торговых и военных кораблей во флоте (t_H и w_H соответственно) определяется Советом из семнадцати голландских купцов, которые управляют Голландской Ост-Индской компанией и стремятся максимизировать её ожидаемую прибыль. Торговые суда обеих компаний представляют для пиратов одинаковый интерес; военные корабли противостоят всем пиратам с равным усердием.

- (f) [9 баллов] Сколько теперь кораблей прикажет вооружить лорд Беккет (если не будет брать в расчёт ложные порты, нарисованные на торговых судах)?
- (g) [2 балла] Какой процент (округлите до целых) от *потенциальной* прибыли станет получать Британская Ост-Индская торговая компания с появлением Голландской компании?

Обратите внимание, что на вопросы (f) и (g) можно ответить, не решая пункт (e).

Решение.

(a)

Обозначим долю успешных рейсов торговых судов за x , тогда доля рейсов, загубленных пиратами, равна $(1 - x)$. Согласно статистике, верна пропорция

$$\frac{x}{1-x} = \frac{w_B}{p}$$

Следовательно, $x = \frac{w_B}{w_B+p}$ и $(1 - x) = \frac{p}{w_B+p}$.

Себестоимость груза одного торгового судна равна $c = 500$ фунтов стерлингов, при продаже наценка на него составляет $m = 2400\% = 24$, поэтому рыночная стоимость пряностей на одном судне равна $v = (1 + m)c = 25 \cdot 500 = 12500$ фунтов стерлингов.

Ожидаемая за двухлетний срок прибыль Британской Ост-Индской торговой компании есть ожидаемая выручка от продажи пряностей за вычетом их себестоимости:

$$\mathbb{E}(\pi_B) = \frac{w_B}{w_B+p} \cdot v t_B - c t_B$$

Лорд Беккет решает следующую оптимизационную задачу:

$$\begin{cases} \mathbb{E}(\pi_B) \rightarrow \max_{0 \leq t_B, w_B \leq B} \\ \text{s. t. } t_B + w_B = B \\ p = t_B \end{cases}$$

Преобразуем данную задачу, подставив $t_B = B - w_B$ и $p = t_B$ в формулу ожидаемой прибыли:

$$\mathbb{E}(\pi_B) = \left(\frac{w_B}{w_B+t_B} \cdot v - c \right) (B - w_B) = \left(\frac{w_B}{B} \cdot v - c \right) (B - w_B) = (v + c)w_B - cB - \frac{v}{B} \cdot w_B^2 \rightarrow \max_{0 \leq w_B \leq B}$$

Максимизируем ожидаемую прибыль компании по количеству военных кораблей:

$$\mathbb{E}(\pi_B)' = (v + c) - 2 \frac{v}{B} \cdot w_B \Rightarrow (v + c) - 2 \frac{v}{B} \cdot w_B^* = 0 \Rightarrow w_B^* = \frac{v+c}{2v} \cdot B = \frac{12500+500}{2 \cdot 12500} \cdot 100 = \boxed{52}$$

Ответ. Будет вооружено 52 корабля.

(b)

Имеем $w_B^* = 52$, значит $t_B^* = B - w_B^* = 100 - 52 = 48$ и $p^* = t_B^* = 48$.

Матожидание числа утраченных кораблей равно

$$\frac{p^*}{w_B^*+p^*} \cdot t_B^* = \frac{48}{52+48} \cdot 48 = 23,04 \approx \boxed{23}$$

Ответ. Следует ожидать, что будет потеряно 23 торговых судна компании.

(c)

Ожидаемая за двухлетний срок прибыль Британской Ост-Индской компании составляет

$$\mathbb{E}(\pi_B) = \frac{w_B^*}{w_B^*+p^*} \cdot v t_B^* - c t_B^* = \frac{52}{52+48} \cdot 12500 \cdot 48 - 500 \cdot 48 = \boxed{336\,000}$$

Ответ. Ожидаемая прибыль равна 336 000 фунтов стерлингов.

(d)

Если бы компания не была вынуждена бороться с пиратством, то все $B = 100$ кораблей перевозили бы пряности. В таком случае прибыль была бы равна

$$\pi_B = vB - cB = (v - c)B = (12500 - 500) \cdot 100 = 1\,200\,000$$

Реальная прибыль (336 000 фунтов стерлингов) составляет от этой потенциальной прибыли долю

$$336\,000 / 1\,200\,000 = \boxed{28\%}$$

Ответ. Компания реально получает 28% от потенциальной прибыли.

(e)

Новая функция прибыли выглядит так:

$$\mathbb{E}(\pi_B) = \left(2 \cdot \frac{w_B}{w_B + p}\right) v t_B - c t_B = \frac{w_B}{w_B + p} (2v) t_B - c t_B$$

С алгебраической точки зрения, удвоение вероятности $\frac{w_B}{w_B + p}$ успеха рейса эквивалентно удвоению рыночной стоимости v перевозимых им грузов. Следовательно, новое оптимальное число военных кораблей будет равно

$$w_B^* = \frac{(2v) + c}{2(2v)} \cdot B = \frac{(2 \cdot 12500) + 500}{2 \cdot (2 \cdot 12500)} \cdot 100 = 51$$

Число торговых (и пиратских) судов есть $t_B^* = p^* = B - w_B^* = 100 - 51 = 49$. Новая ожидаемая прибыль равна

$$\mathbb{E}(\pi_B) = \frac{w_B^*}{w_B^* + p^*} \cdot (2v) t_B^* - c t_B^* = \frac{51}{51 + 49} \cdot (2 \cdot 12500) \cdot 49 - 500 \cdot 49 = 600\,250$$

Эта новая прибыль составляет от потенциальной прибыли компании (1 200 000 фунтов стерлингов) долю

$$600\,250 / 1\,200\,000 = 50,002\% \approx \boxed{50\%}$$

Ответ. Компания станет получать примерно 50% от своей потенциальной прибыли.

(f)

В новых условиях доля y успешных рейсов торговых судов обеих компаний определяется из условия

$$\frac{y}{1-y} = \frac{w_B + w_H}{p}$$

Решаем пропорцию и получаем $y = \frac{w_B + w_H}{w_B + w_H + p}$.

Теперь ожидаемая за двухлетний срок прибыль Британской и Голландской компаний соответственно есть

$$\mathbb{E}(\pi_B) = \frac{w_B + w_H}{w_B + w_H + p} \cdot v t_B - c t_B \quad \text{и} \quad \mathbb{E}(\pi_H) = \frac{w_B + w_H}{w_B + w_H + p} \cdot v t_H - c t_H$$

Лорд Беккет и Совет из семнадцати голландских купцов одновременно решают такие оптимизационные задачи:

$$\begin{cases} \mathbb{E}(\pi_B) \rightarrow \max_{0 \leq t_B, w_B \leq B} \\ \text{s. t. } t_B + w_B = B \\ p = t_B + t_H \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \mathbb{E}(\pi_H) \rightarrow \max_{0 \leq t_H, w_H \leq H} \\ \text{s. t. } t_H + w_H = H \\ p = t_B + t_H \end{cases}$$

Преобразуем задачу лорда Беккета, подставив $t_B = B - w_B$, $t_H + w_H = H$ и $p = t_B + t_H$ в формулу ожидаемой прибыли Британской Ост-Индской компании:

$$\mathbb{E}(\pi_B) = \left(\frac{w_B + w_H}{w_B + w_H + t_B + t_H} \cdot v - c \right) (B - w_B) = \left(\frac{w_B + w_H}{B + H} \cdot v - c \right) (B - w_B) =$$

$$= \left(\frac{B}{B+H} \cdot v - \frac{v}{B+H} \cdot w_H + c \right) w_B + \left(\frac{B}{B+H} \cdot v w_H - cB \right) - \frac{v}{B+H} \cdot w_B^2 \rightarrow \max_{0 \leq w_B \leq B}$$

Максимизируем ожидаемую прибыль компании по количеству военных кораблей:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\pi_B)' &= \left(\frac{B}{B+H} \cdot v - \frac{v}{B+H} \cdot w_H + c \right) - 2 \frac{v}{B+H} \cdot w_B \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\frac{B}{B+H} \cdot v - \frac{v}{B+H} \cdot w_H + c \right) - 2 \frac{v}{B+H} \cdot w_B^* &= 0 \Rightarrow w_B^* = \frac{1}{2} \left(B - w_H + \frac{c}{v} (B + H) \right) \end{aligned}$$

Последнее уравнение есть *функция реакции* $w_B^*(w_H)$ Британской компании, показывающая, сколько кораблей вооружит лорд Беккер при условии, что голландцы вооружат w_H своих кораблей. В силу симметрии получаем следующую функцию реакции $w_H^*(w_B)$ Голландской компании:

$$w_H^* = \frac{1}{2} \left(H - w_B + \frac{c}{v} (B + H) \right)$$

В равновесии выбор компаний (значения w_B^* и w_H^*) должен удовлетворять системе из двух функций реакции:

$$\begin{aligned} \begin{cases} w_B^* = \frac{1}{2} \left(B - w_H^* + \frac{c}{v} (B + H) \right) \\ w_H^* = \frac{1}{2} \left(H - w_B^* + \frac{c}{v} (B + H) \right) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} w_B^* = \frac{1}{3} \left((2B - H) + \frac{c}{v} (B + H) \right) \\ w_H^* = \frac{1}{3} \left((2H - B) + \frac{c}{v} (B + H) \right) \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} w_B^* = \frac{1}{3} \left((2 \cdot 100 - 75) + \frac{500}{12500} (100 + 75) \right) = \boxed{44} \\ w_H^* = \frac{1}{3} \left((2 \cdot 75 - 100) + \frac{500}{12500} (100 + 75) \right) = 19 \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ. Лорд Беккет прикажет вооружить 44 корабля Британской компании.

(g)

Поскольку $w_B^* = 44$, то $t_B^* = B - w_B^* = 100 - 44 = 56$. Аналогично, раз $w_H^* = 19$, то $t_H^* = H - w_H^* = 75 - 19 = 56$. Значит, $p^* = t_B^* + t_H^* = 56 + 56 = 112$.

Ожидаемая за двухлетний срок прибыль Британской Ост-Индской компании составляет

$$\mathbb{E}(\pi_B) = \frac{w_B^* + w_H^*}{w_B^* + w_H^* + p^*} \cdot v t_B^* - c t_B^* = \frac{44 + 19}{44 + 19 + 112} \cdot 12500 \cdot 56 - 500 \cdot 56 = 224\,000$$

Эта новая прибыль составляет от потенциальной прибыли компании (1 200 000 фунтов стерлингов) долю

$$224\,000 / 1\,200\,000 = 18,667\% \approx \boxed{19\%}$$

Ответ. Британская компания станет получать примерно 19% от своей потенциальной прибыли.