

Задача “Capuchin monkeys”

Обезьянки-капуцины Альфред и Брюс участвуют в эксперименте Института экономических исследований Готэм-Сити. Экспериментатор помещает обоих капуцинов в клетку и каждому даёт по одной виноградине. Затем экспериментатор садится рядом с клеткой и каждые пять минут подкладывает в неё по одной виноградине: всего ещё N штук. При этом обезьянки не знают, сколько всего виноградин принесёт экспериментатор. Экспериментатор полагает, что в каждый момент времени функции полезности Альфреда и Брюса имеют следующий вид: $u_A = \alpha \ln(a) + \ln(b)$ и $u_B = \ln(a) + \beta \ln(b)$, где a – количество виноградин, съеденных Альфредом, b – число виноградин, доставшихся Брюсу, α и β – некоторые положительные константы. Каждый раз, когда в клетке появляется новая виноградина, капуцины сами решают, кто из них её съест. Если на текущую виноградину претендуют и Альфред, и Брюс, то она достаётся Альфреду, поскольку он сильнее Брюса и выше его по статусу. Если никто из капуцинов текущую виноградину не берёт, то эксперимент останавливается досрочно.

- (a) Допустим, выполнено $\alpha\beta > 1$. Докажите, что при любом натуральном N эксперимент не будет завершён досрочно.
- (b) Пусть $\alpha = \beta = 2$ и $N = 100$. Кто из капуцинов съест больше виноградин и на сколько?

Решение.

(a) Кто должен съесть следующую виноградину, каждый из капуцинов решает, сравнивая приращения собственной полезности (предельные полезности) в двух ситуациях: когда виноградина достаётся самому капуцину и когда она достаётся другому капуцину. Величины a и b дискретные, поэтому предельные полезности Альфреда (MU_a^A и MU_b^A) и Брюса (MU_a^B и MU_b^B) являются не производными их общих полезностей, а разностными величинами:

$$MU_a^A = u_A(a+1, b) - u_A(a, b) = \alpha \ln(a+1) + \ln(b) - \alpha \ln(a) - \ln(b) = \alpha \ln\left(\frac{a+1}{a}\right),$$

$$MU_b^A = u_A(a, b+1) - u_A(a, b) = \alpha \ln(a) + \ln(b+1) - \alpha \ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{b+1}{b}\right);$$

$$MU_a^B = u_B(a+1, b) - u_B(a, b) = \ln(a+1) + \beta \ln(b) - \ln(a) - \beta \ln(b) = \ln\left(\frac{a+1}{a}\right),$$

$$MU_b^B = u_B(a, b+1) - u_B(a, b) = \ln(a) + \beta \ln(b+1) - \ln(a) - \beta \ln(b) = \beta \ln\left(\frac{b+1}{b}\right).$$

Альфред сильнее Брюса и выше его по обезьяньему статусу, поэтому текущая виноградина достаётся Альфреду тогда и только тогда, когда $MU_a^A \geq MU_b^A$ (предполагаем, что в случае равенства предельных полезностей, капуцин всё же претендует на виноградину, хотя можно считать и иначе – на решении это не отразится). Брюс получает виноградину тогда и только тогда, когда одновременно выполнены условия $MU_a^A < MU_b^A$ (Альфред уступает) и $MU_a^B \leq MU_b^B$ (Брюс не уступает). Соответственно, никто из капуцинов текущую виноградину не берёт тогда и только тогда, когда одновременно $MU_a^A < MU_b^A$ (Альфред уступает) и $MU_a^B > MU_b^B$ (Брюс уступает), в такой ситуации эксперимент останавливается досрочно.

Итак, условие досрочного завершения эксперимента следующее:

$$\begin{aligned} \begin{cases} MU_a^A < MU_b^A \\ MU_a^B > MU_b^B \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \ln\left(\frac{a+1}{a}\right) < \ln\left(\frac{b+1}{b}\right) \\ \ln\left(\frac{a+1}{a}\right) > \beta \ln\left(\frac{b+1}{b}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\left(\frac{a+1}{a}\right) : \ln\left(\frac{b+1}{b}\right) < \frac{1}{\alpha} \\ \ln\left(\frac{a+1}{a}\right) : \ln\left(\frac{b+1}{b}\right) > \beta \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \beta < \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha\beta < 1. \end{aligned}$$

Выполнение условия $\alpha\beta < 1$ необходимо для досрочной остановки эксперимента, поэтому при $\alpha\beta > 1$ её точно не случится: все виноградины, которые принесёт экспериментатор, будут съедены.

(b) $\alpha = \beta = 2 \Rightarrow \alpha\beta > 1$, значит, досрочно эксперимент не завершится. Каждую из N виноградин Альфред либо присвоит себе (если он претендует на виноградину, то мнение Брюса ни на что не влияет), либо уступит Брюсу (и тогда Брюс точно её съест, ведь взаимные уступки, как мы уже выяснили, исключены). Это означает, что распределение виноградин определяется лишь функцией полезности Альфреда, а точнее постоянным сравнением предельных полезностей $MU_a^A \geq MU_b^A$.

Поскольку $MU_a^A = \alpha \ln\left(\frac{a+1}{a}\right)$, $MU_b^A = \ln\left(\frac{b+1}{b}\right)$ и $\alpha = 2$, то имеем $MU_a^A \geq MU_b^A \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2 \ln\left(\frac{a+1}{a}\right) \geq \ln\left(\frac{b+1}{b}\right) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{a+1}{a}\right)^2 \geq \ln\left(\frac{b+1}{b}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{a+1}{a}\right)^2 \geq \frac{b+1}{b},$ то есть
 сравнение MU_a^A и MU_b^A эквивалентно сравнению величин $\left(\frac{a+1}{a}\right)^2$ и $\frac{b+1}{b}$.

Для наглядности заполним следующую таблицу, принимая во внимание, что изначально $a = b = 1$ или $a - 1 = b - 1 = 0$.

$a + b - 2$	$a - 1$	$b - 1$	$e^{MU_a^A} = \left(\frac{a+1}{a}\right)^2$	$\geq$	$e^{MU_b^A} = \frac{b+1}{b}$	Кому текущая виноградина?
0	0	0	4/1	>	2/1	Альфреду
1	1	0	9/4	>	2/1	Альфреду
2	2	0	16/9	<	2/1	Брюсу
3	2	1	16/9	>	3/2	Альфреду
4	3	1	25/16	>	3/2	Альфреду
5	4	1	36/25	<	3/2	Брюсу
6	4	2	36/25	>	4/3	Альфреду
7	5	2	49/36	>	4/3	Альфреду
8	6	2	64/49	<	4/3	Брюсу
9	6	3	64/49	>	5/4	Альфреду
...	...	...	...	...	...	...
99	66	33	$68^2/67^2$	>	65/64	Альфреду
$N = 100$	<u>67</u>	<u>33</u>	-	-	-	-

Видно чередование: две виноградины съедает Альфред, одну – Брюс, две – Альфред, одну – Брюс и т.д. Поэтому, когда $a + b - 2$ делится на три, то выполняется равенство $a - 1 = 2(b - 1)$. При $a + b - 2 = 99$ эта зависимость должна соблюдаться, поэтому в этот момент имеем $a - 1 = 66$ и $b - 1 = 33$. Последняя (сто вторая) виноградина достаётся Альфреду, значит всего он съедает 68 штук, а Брюс – 34 штуки. Вычитаем: $68 - 34 = 34$. Ответ: Альфред съест на 34 виноградины больше.

Осталось доказать, что чередование (две виноградины – Альфреду, одна – Брюсу), а значит, и условие $a - 1 = 2(b - 1)$ при $(a + b - 2) : 3$ будет сохраняться всегда. Применим метод математической индукции.

База индукции.

- Изначально при $a + b - 2 = 0$ имеем $a - 1 = b - 1 = 0$ и $\left(\frac{a+1}{a}\right)^2 > \frac{b+1}{b}$ (виноградина достаётся Альфреду).
- При $a + b - 2 = 1$ имеем $a - 1 = 1, b - 1 = 0$ и $\left(\frac{a+1}{a}\right)^2 > \frac{b+1}{b}$ (Альфреду).
- Наконец, при $a + b - 2 = 2$ имеем $a - 1 = 2, b - 1 = 0$ и $\left(\frac{a+1}{a}\right)^2 < \frac{b+1}{b}$ (Брюсу).

Итог: при $a + b - 2 = 3 : 3$ выполнено $a - 1 = 2(b - 1)$.

Индукционный переход. Предположим, что для некоторого $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ выполнены условия $a + b - 2 = 3k : 3$ и $a - 1 = 2(b - 1)$ (то есть $a - 1 = 2k$ и $b - 1 = k$). Тогда, чтобы определить, как будут распределены три следующие виноградины, покажем, что будут справедливы следующие неравенства:

- (1) $\left(\frac{2k+2}{2k+1}\right)^2 > \frac{k+2}{k+1}$, то есть при $a + b - 2 = 3k$ текущая виноградина идёт Альфреду;
- (2) $\left(\frac{2k+3}{2k+2}\right)^2 > \frac{k+2}{k+1}$, то есть при $a + b - 2 = 3k + 1$ виноградина идёт Альфреду;
- (3) $\left(\frac{2k+4}{2k+3}\right)^2 < \frac{k+2}{k+1}$, то есть при $a + b - 2 = 3k + 2$ виноградина достаётся Брюсу.

Шаг индукции.

- Упрощая неравенство (1), получаем, что оно эквивалентно $4k + 1 > 0$.
- Неравенство (2) эквивалентно $k + 1 > 0$.
- Неравенство (3) эквивалентно $0 < k + 2$.

Все три простых неравенства, очевидно, верны, поэтому неравенства (1), (2) и (3) справедливы. Значит, при $a + b - 2 = 3(k + 1) : 3$ (после того, как распределены три виноградины) условие $a - 1 = 2(b - 1)$ снова оказывается выполненным (так как $a - 1 = 2k + 2$ и $b - 1 = k + 1$). Индукция завершена.