

S011. Функция спроса для одного монополиста является линейной, предельные издержки постоянны и равны средним общим издержкам. Монополист знает, что при установленной им нынешней цене ($P = 40$) он не максимизирует прибыль. Однажды он спросил своего менеджера, как изменится прибыль, если повысить цену на 35% по сравнению с нынешней ценой. Прибыль увеличится тоже на 35%, ответил менеджер. А если мы повысим цену на 45% по сравнению с нынешней? Тогда прибыль, наоборот, *упадет* на 45% по сравнению с нынешней прибылью, ответил менеджер.

«Это какая-то мистика» – пробормотал монополист и пошел в библиотеку за учебником по микроэкономике.

Пожалуйста, определите предельные издержки монополиста.

Решение

В задаче ничего не сказано о единицах измерения объема, поэтому мы можем выбрать такие единицы для Q , при которых функция спроса имеет вид: $Q = a - P$. Будем считать, что $MC = ATC = c$.

Нынешнее значение прибыли: $\pi = (a - 40)(40 - c)$ (1).

Если цена будет равна $1,35P = 54$, $\pi_1 = (a - 54)(54 - c) = 1,35(a - 40)(40 - c)$ (2).

Если цена будет равна $1,45P = 58$, $\pi_2 = (a - 58)(58 - c) = (1 - 0,45)(a - 40)(40 - c)$ (3).

Уравнения (2) и (3) образуют следующую систему:

$$\begin{cases} 54a - ac - 2916 + 54c = 54a - 1,35ac - 2160 + 54c \\ 58a - ac - 3364 + 58c = 22a - 0,55ac - 880 + 22c \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,35ac - 756 = 0 & (4) \\ 36a - 0,45ac - 2484 + 36c = 0 & (5) \end{cases}$$

Умножим левую и правую части уравнения (4) на $\frac{9}{7}$, а затем сложим уравнения (4) и (5). После этого получим: $36a - 3456 + 36c = 0$. $a = 96 - c$. Подставим это выражение для a в уравнение (4): $0,35(96 - c)c - 756 = 0$. $-0,35c^2 + 33,6c - 756 = 0$. Получаем два корня: $c_1 = 36$; $c_2 = 60$ (этот корень не подходит, так как средние издержки не могут быть выше нынешней цены).

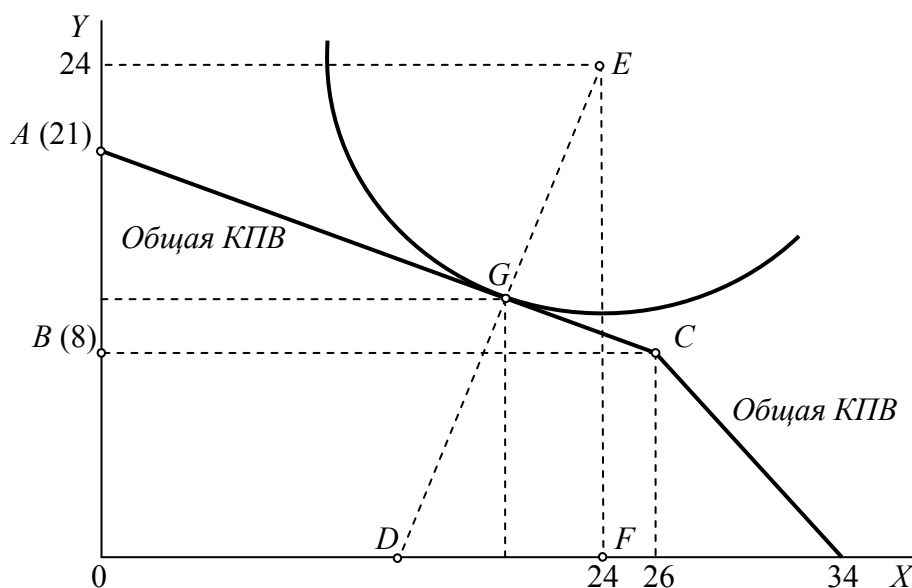
Ответ. $MC = 36$.

S012. Однажды Бивис и Баттхед пошли в лес собирать грибы и ягоды. КПВ Бивиса: $Y_1 = 13 - 0,5X_1$; КПВ Баттхеда: $Y_2 = 8 - X_2$ (где X_1, X_2 – число собранных за день ягод, Y_1, Y_2 – число собранных за день грибов). Общая карта кривых безразличия Бивиса и Баттхеда представляет собой множество концентрических окружностей с центром в точке (24; 24). Сколько грибов и ягод соберут Бивис и Баттхед, максимизируя свою общую функцию полезности?

Решение

Поскольку радиус в точке касания общей КПВ и кривой безразличия перпендикулярен касательной, AC и GE перпендикулярны. Отсюда следует, что $\angle ACB = \angle DEF$. Также можно заключить, что прямоугольные треугольники ABC и DEF подобны. Из подобия этих треугольников следует, что $\frac{DF}{EF} = \frac{AB}{BC}$. $\frac{DF}{24} = \frac{21-8}{26}$. $DF = 12$.

Используя координаты точек $D(12; 0)$ и $E(24; 24)$, найдем уравнение прямой DE : $\frac{Y-0}{24-0} = \frac{X-12}{24-12}$; $Y - 2X + 24 = 0$ (1)



Используя координаты точек $A(0; 21)$ и $C(26; 8)$, найдем уравнение прямой AC :

$$\frac{Y - 21}{8 - 21} = \frac{X - 0}{26 - 0}; \quad Y + 0,5X - 21 = 0 \quad (2)$$

Решив систему уравнений (1) и (2), находим: $X = 18$, $Y = 12$.

Ответ. 18 ягод и 12 грибов.

S013. В одной стране все продукты питания производятся одной государственной корпорацией. Государство приняло на себя обязательство, согласно которому цена условной потребительской корзины должна быть постоянной и равной 66 копейкам. Если один товар, входящий в корзину, дорожает, то другие должны дешеветь. Потребительская корзина включает в себя плавленый сырок, пирожок с капустой и бутылку кваса. Издержки корпорации на производство этих продуктов соответственно составляют: 25, 16 и 4 копейки. Все жители страны имеют одинаковую функцию полезности: $U = X_1 X_2 X_3$, где X_1 , X_2 , X_3 – соответственно месячное потребление сырков, пирожков и бутылок кваса. На перечисленные продукты жители тратят весь свой доход, при этом доходы всех жителей постоянны и равны между собой. Каждый житель может приобретать продукты в любой пропорции (необязательно, чтобы эта пропорция соответствовала соотношению продуктов в потребительской корзине). Корпорация удовлетворяет весь платежеспособный спрос на продукты.

Какие цены (P_1, P_2, P_3) установит корпорация на перечисленные продукты для того, чтобы получать максимальную прибыль?

Решение

Поскольку функция полезности потребителя является функцией Кобба-Дугласа, то он максимизирует общую полезность при условии: $P_1 X_1 = P_2 X_2 = P_3 X_3$.

$X_2 = \frac{P_1}{P_2} X_1$. $X_3 = \frac{P_1}{P_3} X_1$. Прибыль корпорации $\pi = R - TC$. Очевидно, выручка кор-

порации равна доходу потребителей, который они тратят на приобретение продуктов: $R = I$. При этом I – постоянная величина, которая не зависит от цен и объемов приобретаемых продуктов.

$$I = P_1 X_1 + P_2 X_2 + P_3 X_3 = 3P_1 X_1. \quad X_1 = \frac{I}{3P_1}.$$

$$\begin{aligned} \pi &= I - TC = I - (25X_1 + 16X_2 + 4X_3) = I - 25X_1 - 16\frac{P_1}{P_2}X_1 - 4\frac{P_1}{P_3}X_1 = \\ &= I - 25\frac{I}{3P_1} - 16\frac{P_1}{P_2} \cdot \frac{I}{3P_1} - 4\frac{P_1}{P_3} \cdot \frac{I}{3P_1} = I \left(1 - \frac{25}{3P_1} - \frac{16}{3P_2} - \frac{4}{3P_3} \right) = \\ &= I \left[1 - \frac{25}{3(66 - P_2 - P_3)} - \frac{16}{3P_2} - \frac{4}{3P_3} \right]. \end{aligned}$$

Максимум прибыли достигается при условии:

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial P_2} = \frac{I}{3} \left[-\frac{25}{(66 - P_2 - P_3)^2} + \frac{16}{P_2^2} \right] = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial P_3} = \frac{I}{3} \left[-\frac{25}{(66 - P_2 - P_3)^2} + \frac{4}{P_3^2} \right] = 0 \\ \begin{cases} \frac{-25P_2^2 + 16(66 - P_2 - P_3)^2}{(66 - P_2 - P_3)^2 P_2^2} = 0 \\ \frac{-25P_3^2 + 4(66 - P_2 - P_3)^2}{(66 - P_2 - P_3)^2 P_3^2} = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -25P_2^2 + 16(66 - P_2 - P_3)^2 = 0 \\ -100P_3^2 + 16(66 - P_2 - P_3)^2 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 25P_2^2 &= 100P_3^2. \quad P_2 = 2P_3. \quad -100P_3^2 + 16(66 - 2P_3 - P_3)^2 = 0. \quad 10P_3 = 4(66 - 3P_3). \\ P_3 &= 12. \quad P_2 = 2P_3 = 24. \quad P_1 = 66 - P_2 - P_3 = 30. \end{aligned}$$

Ответ. $P_1 = 30$, $P_2 = 24$, $P_3 = 12$.

S014. Две фирмы, первыми подготовившие производство квантовых микропроцессоров, заключили негласное соглашение о разделе рынка. По этому соглашению некая фиксированная доля общего объема продаж будет приходиться на первую фирму, а оставшаяся доля – на вторую. Кроме того, цена товара будет установлена таким образом, чтобы обе фирмы, вместе взятые, получили на данном рынке максимальную выручку. Когда первая фирма ввела в строй производственные мощности, необходимые для выпуска товара в объеме установленной для нее квоты, один из специалистов фирмы из праздного интереса подсчитал, что в случае если вторая фирма куда-нибудь исчезнет, квота первой фирмы может быть продана на рынке по такой цене, при которой выручка этой первой фирмы составит 96% от того максимального объема выручки, который предполагают получать обе фирмы, вместе взятые. Известно, что функция спроса на данном рынке линейна.

Определите доли первой и второй фирмы, установленные негласным соглашением.

Решение

Линейная функция спроса имеет вид: $Q = a - bP$. Для того чтобы упростить вычисления, выберем такие единицы измерения Q и P , при которых функция спроса выглядит следующим образом: $Q = 1 - P$. Выручка $R = PQ = (1 - Q)Q = Q - Q^2$. Максимум выручки достигается при условии: $R' = 1 - 2Q = 0$. Общий объем выпуска, при котором достигается максимальная выручка: $Q = 0,5$. $R_{max} = 0,5 - 0,25 = 0,25$.

Предположим, доля первой фирмы по условиям соглашения равна x ($0 < x < 1$). Тогда количественная квота первой фирмы составит: $Q_1 = Q \cdot x = 0,5x$. Эта квота может быть продана по цене: $P_1 = 1 - Q_1 = 1 - 0,5x$. Выручка фирмы при этом составит: $R_1 = P_1 Q_1 = (1 - 0,5x) 0,5x = 0,5x - 0,25x^2$.

По условию $R_1 = 0,96 R_{max}$. $0,5x - 0,25x^2 = 0,96 \cdot 0,25$. $x^2 - 2x + 0,96 = 0$. $x_1 = 1,2$ (этот корень не подходит по условию задачи), $x_2 = 0,8$.

Ответ. Доля первой фирмы – 80%, второй – 20%.

S015. Сообщество гуманоидов имеет функцию полезности $U = X_1 X_2^2$, где X_1 – физическое производство предметов потребления в *любом текущем* году, X_2 – производство предметов потребления в следующем за ним году.

Кривая производственных возможностей сообщества имеет вид: $X_2 + Y_2 = 2,6Y_1$ (здесь Y_1 и Y_2 – соответственно физические объемы производства средств производства в текущем и следующем году). Ежегодно поддерживается одно и то же соотношение физических объемов производства предметов потребления и средств производства. Все предметы потребления используются в течение того текущего года, в котором они производятся. Все средства производства, производимые в текущем году, накапливаются. Они полностью используются только в течение следующего года. Определите темп ежегодного экономического роста (в процентах), который будет поддерживаться в данном сообществе.

Решение

Пусть $X_1 + Y_1 = 1$. По условию задачи $\frac{X_1}{Y_1} = \frac{X_2}{Y_2}$. $\frac{X_1}{1 - X_1} = \frac{X_2}{2,6Y_1 - X_2}$.

$$\frac{X_1}{1 - X_1} = \frac{X_2}{2,6(1 - X_1) - X_2}. \quad X_2 = 2,6X_1(1 - X_1).$$

$$U = X_1 X_2^2 = X_1 \times [2,6X_1(1 - X_1)]^2 = 2,6^2 X_1^3(1 - X_1)^2.$$

$$U' = 3 \times 2,6^2 X_1^2(1 - X_1)^2 - 2 \times 2,6^2 X_1^3(1 - X_1) = 0. \quad X_1 = 0,6. \quad X_2 = 2,6X_1(1 - X_1) = 0,624.$$

$$\frac{X_2}{X_1} = 1,04. \quad \text{Таким образом, производство предметов потребления вырастет на 4\%}.$$

Нетрудно убедиться, что таким же будет и рост производства средств производства.

Ответ: 4%.