

**Теория игр–β****Листок 4.** Контракты**Преподаватели:** Рита Голуб**Составитель:** Степан Бронников**Дедлайн:** 13 августа 2023 года, 21:00 МСКЗадачи в этом листке можно сдавать **только по порядку**.**Задача 1**

Андрей решил устроиться ассистентом в Летнюю Электромагнитическую Школу (ЛЭШ). Для этого ему необходимо пройти собеседование. Собеседование проводит Федор Данилов. Федор заинтересован в том, чтобы Андрей трудился на смене, ведь тогда есть шанс, что ЛЭШ понравится школьникам и случится успешный успех. У Андрея есть два выбора относительно своих усилий: либо трудиться ($e = 1$), либо бездельничать ($e = 0$). Если Андрей работает усердно, то успешный успех наступает с шансом 0,5 и Федор в этом случае получит выигрыш $x_s = 20$. Но с вероятностью 0,5 ЛЭШ пройдет как обычно и тогда Федор получит всего $x_f = 10$. Если же Андрей ленится, то успешный успех наступает с вероятностью 0,1, а с вероятностью 0,9 все проходит как обычно. Полезность Андрея имеет вид $u = \sqrt{w} - e$. Также у Андрея есть вариант все лето копать картошку в родном городе Новосимбирске, от этого он получит выигрыш $u = 1$.

Итоговый выигрыш Федора — выигрыш от проведения смены минус затраты на зарплату Андрею w . Федор не первый год в этом бизнесе и может определять, какие усилия прилагает ассистент. Какой контракт предложит Федор Андрею?

Задача 2

Перед самым собеседованием Федор понял, что устал заниматься ассистентами и пошел искать хороших лекторов для ЛЭШ. На должность рекрутера пригласили Артема. Артем ничего не знает об экономике и ассистентах, а потому не может определять, как трудится ассистент. Он больше любит пикники на природе. Определите, какой контракт предложит Артем Андрею, если все остальные условия из предыдущей задачи остались прежние?

Задача 3

Даник решил открыть кофейню, но для этого ему необходимо нанять бариста. В силу специфики кофейни бариста может прилагать 3 типа усилий: $\frac{5}{3}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{4}{3}$. Успех кофейни случаен, но зависит от приложенных усилий следующим образом:

Если бариста прикладывает усилия $\frac{5}{3}$, то

$$x = \begin{cases} 10 & \text{с вероятностью } \frac{2}{3} \\ 0 & \text{с вероятностью } \frac{1}{3} \end{cases}$$

Если бариста прикладывает усилия $\frac{8}{5}$, то

$$x = \begin{cases} 10 & \text{с вероятностью } \frac{1}{2} \\ 0 & \text{с вероятностью } \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Если бариста прикладывает усилия } \frac{4}{3}, \text{ то}$$

$$x = \begin{cases} 10 & \text{с вероятностью } \frac{1}{3} \\ 0 & \text{с вероятностью } \frac{2}{3} \end{cases}$$

Полезность баристы описывается функцией $u = \sqrt{w} - e$. У баристы также есть опция не работать нигде и получать полезность $\underline{u} = 1$.

Прибыль Даника — доход от успеха кофейни x за вычетом зарплаты баристы.

Найдите, какой контракт предложит Даник баристе, если он хочет максимизировать свою полезность, а также может различать, какие усилия прилагает его работник.

Задача 4

В условиях предыдущей задачи найдите, насколько бы снизилась прибыль Даника, если бы он не умел различать, какой уровень усилий прилагает бариста.

Задача 5

Отец посылает сына на рыбалку, чтобы он поймал ему здорового язя, которого ценит в 12 монет. Язь нужен только отцу, больше никому. Отец обещает дать сыну зарплату в w монет за поход к морю и ещё дополнительный бонус в b монет, если он принесёт язя. Узнав эти условия (которые отец обязан исполнить!), сын может выбрать одно из двух действий:

- пойти к реке, взять в прокате в аренду удочку и попытаться поймать язя — шансы на успех и неудачу при этом равны;
- пойти к реке, посидеть на берегу и вернуться, сказав, что язя поймать не удалось.

Арендная плата за удочку составляет 5 монет и платится после получения всех выплат от отца. Но может получиться так, что этих выплат не хватит, — тогда сын впоследствии, когда у него появятся монеты (предположим, что когда-нибудь это произойдёт), будет вынужден выплатить прокатчику сумму долга в двойном размере.

Отец не может наблюдать, что делает сын у реки. Он выбирает неотрицательные величины зарплаты w и бонуса b так, чтобы максимизировать свой усреднённый выигрыш Π , состоящий из ценности язя (в случае, если сын его поймает) за вычетом всех выплат сыну. Например, если отец рассчитывает, что сын попытается поймать язя, то его усреднённый выигрыш равен

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot (12 - w - b) + \frac{1}{2} \cdot (-w).$$

Сын, наблюдая w и b , выбирает одно из своих двух действий так, чтобы максимизировать свои усреднённые выплаты за вычетом того, что он должен отдать прокатчику. Усреднение производится по тому же принципу, что и для отца. Предполагаем, что, если сыну безразлично, ловить язя или нет, то он ловит.

- Найдите оптимальное действие сына при заданных $w, b \geq 0$;
- Предположим, что отец хочет, чтобы сын ловил язя. С учётом ответа на предыдущий пункт найдите w и b , оптимальные для него в этом случае.
- А действительно ли отец хочет, чтобы сын ловил язя? Как устроен оптимальный контракт (w, b) с учётом ответа на этот вопрос?
- Предположим теперь, что отец может наблюдать, что делает сын на рыбалке, и может поставить бонус $b \geq 0$ в зависимость от этого: если сын брал удочку и поймал язя, то $b = b_1$, а если брал, но не поймал, то $b = b_0$. Теперь отец предлагает сыну контракт (w, b_0, b_1) . Какой контракт будет оптимальным для отца?