

ОСНОВЫ

финансовой математики

Лекция 3. Дисконтирование

Лекция 4. Эффективная ставка процента

«Финансы – это не только деньги.
Это такие отношения между людьми».
(Л.В.Попова, НИУ ВШЭ, 1990- гг.)

Лектор:

Мицкевич Андрей Алексеевич
amitskevitch@mail.ru

к.э.н., доцент ВШФМ РАНХиГС и НИУ ВШЭ

Минимум ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

Лекции 3:

1. Временная ценность денег. Дисконтирование.
2. Рента и рентная цена.
3. Ставка дисконтирования (упрощенное введение).

Лекции 4:

1. Доходность. Эффективная ставка процента.
2. Сравнение условий кредитов. Потребительский кредит. Ипотека.

Часть 2. Примеры расчета и анализ критериев выбора инвестиционного проекта.

НАША Цель - научиться считать длинные деньги

#1. Временная ценность денег

В основе анализа любого
инвестиционного проекта лежит
временная стоимость (ценность) денег

$$S_{t_1} = S_{t_2} (1 + i)^{t_1 - t_2}$$

- 1) $t_1 > t_2$ – наращение
- 2) $t_1 < t_2$ – дисконтирование

Концепция временной стоимости денег стирает грань между
«прошлыми и будущими деньгами»

Дисконтирование позволяет корректно сравнить проекты с
разновременными денежными потоками

Обозначения: i – ставка дисконтирования

Экономика: Объяснение дисконтирования через банковский процент

Пример: Вы должны 15000 руб. вернуть через 2 года.

Вы можете вернуть долг сегодня. Какова сумма, которую вы предложите кредитору (X), если в надежном банке дают 40% годовых с ежеквартальными выплатами процента?

$$15000 = X(1 + 0,1)^8$$

Ежеквартальные выплаты суммы процента можно капитализировать. Потому и процент **сложный**.

Ответ: 7000 руб. **Независимо от результатов переговоров с кредитором!!!**
Значит объективно!!!

7000 – эта величина получила название **Present Value** (приведенная стоимость или ценность).

На языке дисконтирования: квартальная
ставка дисконтирования равна $40\%:4 = 10\%$

$$\frac{15000}{(1 + 0,1)^8} = 7000$$

Дисконтирование: ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Дисконтирование – это процесс обратный начислению сложных процентов:

$$FV = PV \times (1 + r)^n$$

- **PV – Present value (настоящая ценность)**
- **FV – Future value (будущая ценность)**
- **r – ставка дисконтирования (по умолчанию - в год)**
- **n – число лет**

$$V_n = \frac{1}{(1 + r)^n}$$

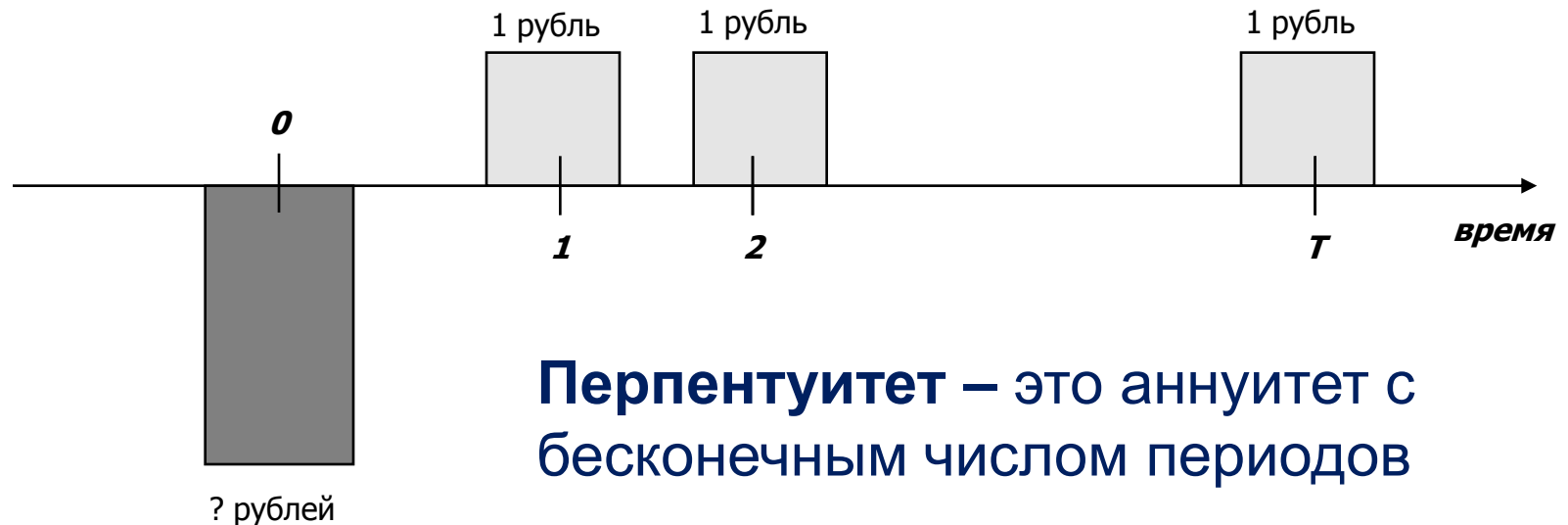
V – дисконтный множитель,
коэффициент дисконтирования.

Например, коэффициент дисконтирования на условиях 10% и 3-х лет, равный 0,751, означает:

доллар, который может быть получен через три года, эквивалентен 0,751 долл., вложенных сегодня под 10% годовых, то есть 0,751 – это современная стоимость доллара (**Present value**), который будет получен через 3 года.

Аннуитет

Сколько стоит заплатить за 1 рубль, получение которого ожидается с интервалом в 1 период на протяжении T периодов?



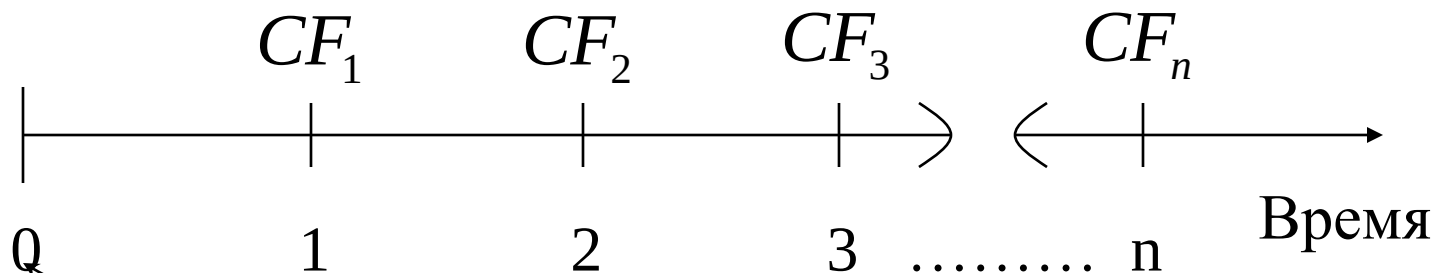
Перпентуитет – это аннуитет с бесконечным числом периодов

$$\frac{1}{(1+r)} + \frac{1}{(1+r)^2} + \dots + \frac{1}{(1+r)^T} = \frac{1 - (1+r)^{-T}}{r}$$

Концепция дисконтированных (приведенных) денежных потоков (DCF)

Сложение денежных потоков различных периодов невозможно

Требуется приведение денежных потоков к одному периоду путем учета временной стоимости денег и риска денежных потоков



$$PV(CF_1) + PV(CF_2) + PV(CF_3) \dots PV(CF_n) = \frac{CF_n}{(1+r)^n}$$

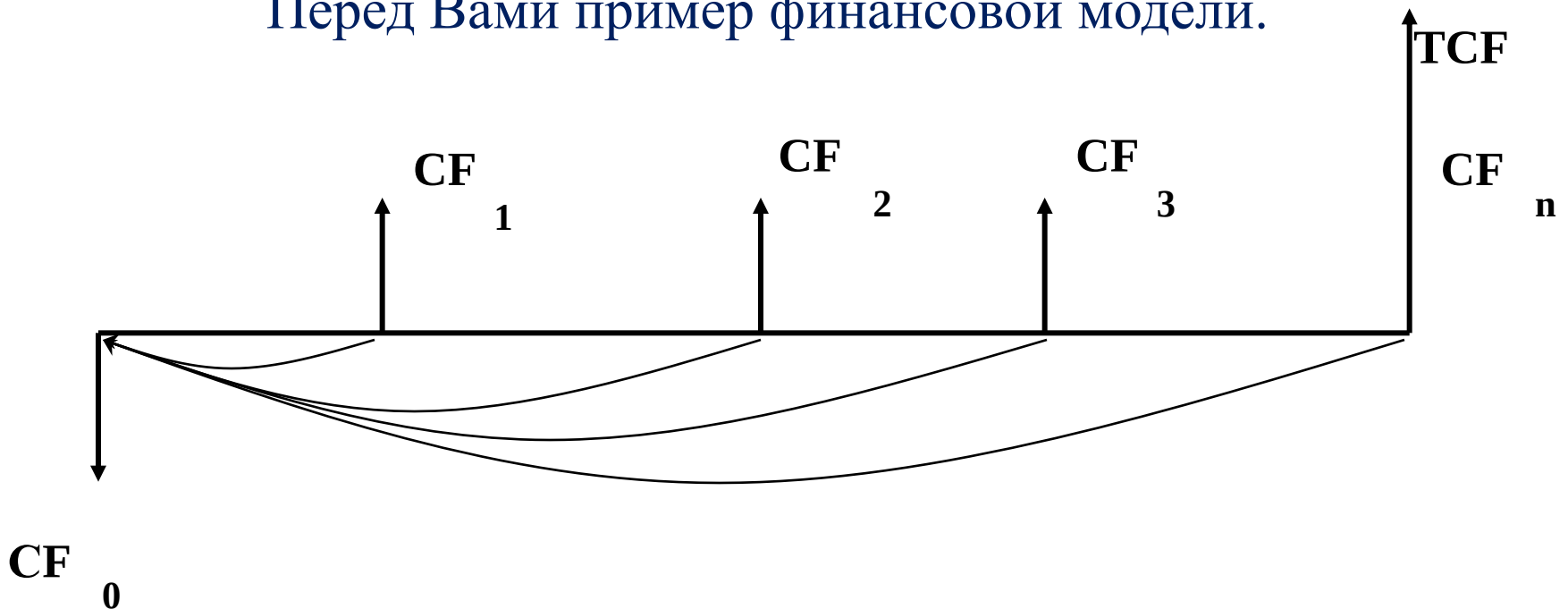
Только приведенные CF обладают свойством аддитивности

Сколько сегодня стоит актив?

Упрощенное определение:

финансовая модель основана на денежных потоках.

Перед Вами пример финансовой модели.



Приведенная стоимость = $\sum$ дисконтированных CF

ВРЕМЕННАЯ ЦЕННОСТЬ ДЕНЕГ

Иллюстрация

- Какую сумму надо положить на депозит в банк, чтобы получить через три года 10000 рублей?

Обещанная банком доходность составляет 10% годовых, вся сумма,

$$10000 \times \frac{1}{(1 + 0,1)^3} = 10000 \times 0,751315 = 7513,15$$

ВРЕМЕННАЯ ЦЕННОСТЬ ДЕНЕГ

Иллюстрация

- Какова ценность (сегодня) денежных потоков, которые корпорация ожидает в будущем, если ставка альтернативных издержек капитала, задействованного для получения этих денежных потоков, равна 14%?

1	2	3	4
2000	3000	4000	6000

$$2000 \times \frac{1}{(1 + 0,14)} + 3000 \times \frac{1}{(1 + 0,14)^2} + 4000 \times \frac{1}{(1 + 0,14)^3} + 6000 \times \frac{1}{(1 + 0,14)^4} =$$

$$= 2000 \times 0,877193 + 3000 \times 0,769468 + 4000 \times 0,674972 + 6000 \times 0,59208 = 10314$$

#2. Финансовые ренты

Финансовой рентой называется поток платежей, производящихся через **равные** промежутки времени

- Рента **пренумерандо** – платежи производятся в начале периода
- Рента **постнумерандо** – платежи производятся в конце периода

Классификация финансовых рент:

1. Метод начисления процентов
2. Количество рентных платежей в году
3. Величины рентных платежей

Математика: Величины рентных платежей

- **Постоянные ренты** (величины всех рентных платежей равны между собой)
- **Переменные ренты**
 - а) Ренты с постоянным абсолютным приростом (рентные платежи образуют арифметическую прогрессию)
 - б) Ренты с постоянным относительным приростом (рентные платежи образуют геометрическую прогрессию)

Количество рентных платежей в году:

- Платеж производится один раз в году (годовая рента)
- Платежи производятся p раз в году (p – срочная рента)
- Платеж производится один раз в несколько лет (редкая рента)

Математика: Геометрическая прогрессия

- Последовательность чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$ называется геометрической прогрессией (г.п.), если $b_k/b_{k-1}=q=const$.
- Финансовым аналогом г.п. является начисление сложных процентов.
- Формула общего члена г.п. $b_n=b_1q^{n-1}$
- Формула суммы первых n членов г.п.

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Математика: Современная ценность финансовой ренты

Современная ценность финансовой ренты PV равна сумме дисконтированных платежей:

$$PV = R a_{n;i}$$

$$a_{n;i} = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \text{ - аннуитет или коэффициент}$$

приведения финансовой ренты

Математика:

- Начисление сложного процента раз в году (группа А)
- Начисление сложного процента несколько раз в году (группа Б)
- Начисление непрерывного процента (группа В)

	А	Б	В
1	$R \cdot a_{n;i}$	$R \frac{a_{mn;\frac{j_m}{m}}}{s_{m;\frac{j_m}{m}}}$	$R \frac{1 - e^{-\delta n}}{e^{\delta} - 1}$
2	$\frac{R}{p} \frac{a_{n;i}}{s_{\frac{1}{p};i}}$	$\frac{R}{p} \frac{a_{mn;\frac{j_m}{m}}}{s_{\frac{m}{p};\frac{j_m}{m}}}$	$\frac{R}{p} \frac{1 - e^{-\delta n}}{e^{\frac{\delta}{p}} - 1}$
3	$Rr \frac{a_{n;i}}{s_{r;i}}$	$Rr \frac{a_{mn;\frac{j_m}{m}}}{s_{mr;\frac{j_m}{m}}}$	$Rr \frac{1 - e^{-\delta n}}{e^{\delta r} - 1}$

Математика: Вечная рента

- Современной ценностью вечной ренты A_∞ называется сумма, которую нужно вложить в начальный момент (в банк), чтобы неограниченно долго ежегодно снимать сумму R .

- В случае ренты $A1$ мы получаем

$$A_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} R \cdot a_{n;i} = R \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} = \frac{R}{i}$$

$$A_\infty = \frac{R}{i}$$

«Цена земли»

- Допустим, что земля продается в октябре. И первый доход от земли можно получить через год. Равновыгодная для покупателя и продавца цена актива, приносящего годовую ренту, равна той сумме X , которую нужно положить в банк, чтобы ежегодно получать ту же ренту:
- $X \cdot i = R$ или $X = R/i$, где
 R - размер ежегодного платежа, а i - банковский процент, выраженный в долях.
- **Действительно, заплатить больше означает проигрыш покупателя**
(цена покупателя $X_{\text{пок}}$ больше R/i)
- **Если сумма меньше, то проигрывает продавец**
(цена продавца $X_{\text{пр}}$ меньше R/i).

Заметьте, что этот вывод получен чисто экономическими рассуждениями, известными, по крайней мере, с XVII века. Что же касается процентов, то они должны быть равны ренте с такого количества земли, которое может быть куплено на те же данные в ссуду деньги при условии полной общественной безопасности. Но там, где это условие под сомнением, обычный естественный процент сплетается с чем-то вроде страховой премии, что может весьма справедливо повысить процент до любого размера ..." (Уильям Петти, 1667 г.)

Финансы: Рентные цены

– это цена капитала как современная стоимость приносимых им доходов.

Равновыгодная для продавца и покупателя в условиях полной информации цена актива или цена, уравнивающая выгоды продавца и покупателя (рентная оценка актива) равна современной стоимости всех будущих приносимых этим активом доходов.

$$\frac{R}{i}$$

$$\frac{\text{Div} + \Delta P}{i}$$

$$k \times V \times N \times \frac{1 - V^n}{1 - V} + V^n \times N$$

- **«Цена земли»**, где R – земельная рента, i – банковский процент
- **«Цена акции»**, где Div – дивиденды, dP – банковский процент
- **«Цена облигации»**, где k – купонный процент,
 V – дисконтный множитель,
 N – номинал облигации, n – число периодов до погашения.

3.1. Что такое ставка дисконтирования (упрощенный кейс «Домашняя хозяйка»)

- Для того, чтобы почувствовать субъективный характер ставки дисконтирования разберем следующую цепь условных ситуаций.
- **Ситуация 1. Домашняя хозяйка, Финансовая компания и Банк.**
Если ничего необычного не случится, то Домашняя хозяйка может положить деньги только в Банк под 10% годовых сроком на год. Но неожиданно к ней зашел представитель Финансовой компании и предложил вложить деньги под 15% годовых. Уровень доверия Домашней хозяйки к Финансовой компании и Банку одинаков, поэтому она предпочла вложить деньги в Финансовую компанию. 15% станут ее альтернативной ставкой вложений.
- Если кто-то еще предложит ей какой-либо инструмент инвестирования, то она будет сравнивать доходность с 15%. Де-факто это равносильно использованию 15% в качестве ставки дисконтирования.

Почему?

Что такое ставка дисконтирования (упрощенный кейс «Домашняя хозяйка»)

- **Ситуация 2. Через год те же Финансовая компания и Банк, но Домашняя хозяйка вышла замуж за бизнесмена.** Он принимает вклады не менее, чем под 20% с той же надежностью, что и другие участники финансового рынка. Вновь к Домашней хозяйке зашел представитель Финансовой компании и предложил вложить деньги под 15% годовых. Ясно, что она ему отказала.
- Теперь 20% станут ее альтернативной ставкой вложений и фактически будут использоваться в качестве ставки дисконтирования.

Почему?

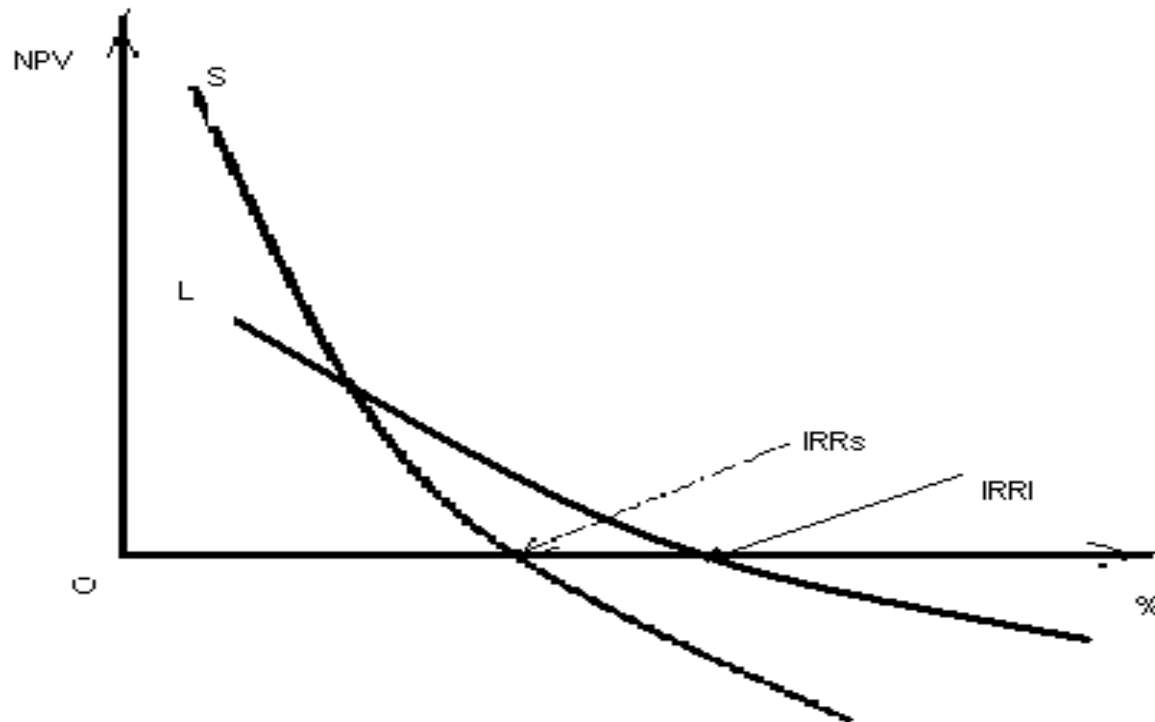
Что такое ставка дисконтирования (упрощенный кейс «Домашняя хозяйка»)

- **Ситуация 3. Те же Финансовая компания, Банк, Домашняя хозяйка и ее муж, но они узнают об инфляции 30% в год.** Что делать, если других инвестиционных предложений нет, а сохранить некоторую сумму на будущее необходимо?
- Надо выбирать лучшее из того, что есть, то есть дать деньги мужу под 20% годовых. Тем самым Домашняя хозяйка минимизирует потери от инфляции.
- А вот будут ли 20% использоваться в качестве ставки дисконтирования, вы решите сами.

Допустим у Домашней хозяйки есть возможность попросить у мужа «компенсирующую доходность» - она в условиях инфляции хочет зарабатывать (в «реальных» деньгах) столько же сколько и до появления инфляции. Найдите «компенсирующую доходность».

В частном случае вообще можно обойтись без
выбора ставки дисконтирования:

Уравнивающая ставка дисконтирования



ОСНОВЫ финансовой математики

Лекция 4. Эффективная ставка процента

**«Annual Percentage Rate is a
measure of the true cost of credit».
(Handbook of MBA)**

Лектор:

Мицкевич Андрей Алексеевич

amitskevitch@mail.ru

к.э.н., доцент ВШФМ РАНХиГС и НИУ ВШЭ

Эффективная процентная ставка (APR)

«Annual Percentage Rate is a measure of the true cost of credit». (Handbook of MBA)

- **Доходностью** называется относительная величина прироста на вложенный капитал или просто скорость роста денег.
- **Правило вычисления доходности:** Если одна и та же финансовая схема повторяется несколько раз, то доходность общей операции не изменяется - она остается равной доходности каждой из одинаковых финансовых схем.
- **Эффективная ставка процента** есть мера доходности или действительной стоимости кредита, депозита или любого другого контракта, связанного с потоками платежей.

Эффективная процентная ставка

- **Взгляд математика:** Эффективной процентной ставкой $i_{\text{эф}}$, соответствующей данной процентной ставке, называется ставка сложного процента, эквивалентная данной и не зависящая от срока применения.
- **Взгляд инвестора:** Эффективной процентной ставка равна ставке дисконтирования, уравнивающей приведенные потоки затрат и результатов (инвестиций и отдачи от инвестиций).
- **Упрощенный взгляд экономиста:** Эффективную ставку можно напрямую сравнивать с банковской ставкой.
- **Упрощенный взгляд финансиста:** Эффективную ставку можно напрямую сравнивать с требуемой доходностью, в частности со средневзвешенной стоимостью капитала.

Эффективная процентная ставка выступает в качестве показателя доходности финансовой операции

Понятие доходности

- Доходность, рост и прирост, дисконт, разнообразные индексы и проценты. Если эти термины употреблены корректно, то вы сможете разобраться. Но что делать, если эти термины не всегда употребляются правильно, если действуют принятые в среде экономистов терминологические соглашения и сокращения?
- До введения понятия эффективной ставки процента доходность была не унифицирована, не имела общепринятой единицы измерения.

Доходность

- Доходность выражается в процентах и участвует в текстах

$$i = \frac{S(T) - S(0)}{S(0)}$$

- Доходность выражается в индексах и участвует в вычислениях

$$I = \frac{S(T)}{S(0)}$$

Право: APR

- **В США** принят федеральный закон (Consumer Credit Protection Act – Закон о защите потребительского кредита), который требует информировать заемщиков об истинной цене кредита (для этого используется APR), то есть об эффективной ставке процента, а также о номинальном превышении суммы, уплачиваемой в рассрочку, над ценой приобретенного товара.
- **В России на APR опираются РЕКОМЕНДАЦИИ ПО СТАНДАРТАМ РАСКРЫТИЯ ИНФОРМАЦИИ ПРИ ПРЕДОСТАВЛЕНИИ ПОТРЕБИТЕЛЬСКИХ КРЕДИТОВ** (пока на добровольной основе), изложенные в ПИСЬМЕ от 26 мая 2005 года ФЕДЕРАЛЬНОЙ АНТИМОНОПОЛЬНОЙ СЛУЖБОЙ № ИА/7235 и ЦЕНТРАЛЬНЫМ БАНКОМ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ № 77-Т

Математика: Эталонная эффективная ставка процента

Эталонная эффективная ставка процента определяется для следующей стандартной схемы кредита: срок кредита год, весь кредит выдается в начале года, а погашается вместе с суммой процента в конце года. В этом случае номинальный процент и эффективная ставка процента совпадают.

Математика: Вычисление эффективной ставки процента (частный случай)

$$(1 + \text{APR})^t = \frac{S(t)}{S(0)}$$

Для схемы кредита с
разовым кредитованием и
разовым возвратом суммы
кредита плюс суммы
процента вычисления
элементарны.

Обозначим за $S(0)$ сумму
кредита, а за $S(t)$ сумму к
возврату через время t .

Математика: Вычисление эффективной ставки процента (общий случай)

$APR = IRR = r$: Это и определение и
ключ к
вычислениям:

$$\sum_{t=0}^T \frac{CF_t}{(1+r)^t} =$$

$$NPV(r) = 0$$

**Эффективная ставка
процента** равна
такой ставке
дисконтирования,
которая уравнивает
дисконтированные
притоки и оттоки.

Вычисление эффективной ставки процента (задача 1а)

$$APR = ?$$

Банк выдает только кредиты под 20% годовых на 3 месяца (90 дней).

Начинает банк работать 5 января, работает 360 дней в году и использует обыкновенный коммерческий процент. За кредитами всегда очередь. Банк действует рационально.

Какова доходность операций банка?

Сколько денег он зарабатывает (в процентах от своего оборотного капитала)

То есть найти APR.

Вычисление эффективной ставки процента (задача 1б)

Банк выдал только один кредит под 20% годовых на 3 месяца.

$APR = ?$ Найти APR.

Эффективная процентная ставка как скорость роста денег

- Это полезная аналогия. Например, сравните привычный образ велосипедиста, едущего со скоростью 50 км в час. Проехал он всего 15 минут и преодолел 12,5 км. Всем ясно, что скорость на этом участке была равна 50 км в час.
- Но не всем понятно, что 5% в квартал дает скорость роста денег 21,55%, а не 20%. Действительно, $(1,05^4 - 1) \times 100\% = 21,55\%$.

Вычисление эффективной ставки процента (задача 2. Мини-кейс «Иван Иванович – пять процентов»)

Условия

потребительского кредитования таковы: при получении товара покупки оплачивается 40% его стоимости, а через год вносится оставшаяся часть равная 5% от стоимости товара в качестве платы за кредит. Найти APR.

$$APR = ?$$

Одно и то же число, фигурирующее в различных кредитных договорах в качестве процента, часто означает разные действительные цены кредита
(задача 3)

$APR = ?$

Например, 20% годовых вперед это совсем не то, что

20% после года пользования кредитом.

Найти APR.

Справка: Такой кредит получил название **ломбардного**. Покажите что для ломбарда схема «проценты вперед» *естественна*.

Эту схему сегодня массово используют на бирже для кредитов под залог ценных бумаг.

Вычисление эффективной ставки процента (задача 4)

$$APR = ?$$

- Кредит дается на 3 года с условием выплаты 10% в конце каждого года в качестве платы за пользование кредитом.
- Сумма кредита возвращается через 3 года.
- Это стандартная схема долгосрочных кредитов.
- Найти APR.

Вычисление эффективной ставки процента (задача 4: решение)

10%

- Кредит дается на 3 года с условием выплаты 10% в конце каждого года в качестве платы за пользование кредитом.
- Сумма кредита возвращается через 3 года.
- Это стандартная схема долгосрочных кредитов.
- Найти APR.

Задача 4: распространенные неверные решения

$$(\sqrt[3]{1,3} - 1) \times 100\% = 9,14\%$$

$$(1,1^3 - 1) : 3 \times 100\% \approx 11\%$$

- Кредит дается на 3 года с условием выплаты 10% в конце каждого года в качестве платы за пользование кредитом.
- Сумма кредита возвращается через 3 года.
- Это стандартная схема долгосрочных кредитов.
- Найти APR.

Принцип эквивалентности выплат одного и того же номинального процента по годам (или иным периодам) и выплат сложного процента в конце срока договора.

Один из популярных вопросов - парадоксов звучит так: какой из трехлетних вкладов выгоднее, с ежегодной выплатой 10% годовых или выплату накопленной суммы процента в конце всего срока вклада?

Многие называют второй вариант. Согласно этому варианту в конце мы получим сразу в 1,331 раза больше по сравнению с суммой вклада.

Но если в первом варианте вложить полученные 10% под те же 10%, то к концу третьего года накопится та же сумма, то есть в 1,331 раза больше по сравнению с суммой вклада.

При вычислении APR формально эти схемы дают один и тот же результат. Как раз потому, что алгоритм вычисления APR предполагает реинвестирование полученных средств под эффективную ставку процента.

Ключевое предположение APR и IRR

В неявном виде подразумевается, что денежные поступления во время функционирования проекта могут быть реинвестированы по ставке, равной IRR (APR).

Наиболее распространенный метод устранения недостатков критерия IRR - расчет модифицированной нормы доходности – MIRR (Modified IRR).

Эквивалентность процентных ставок

- **Дефиниция:** Две схемы называются эквивалентными, если применение их к одинаковым суммам в течение одинаковых промежутков времени дает одинаковые наращенные суммы.
- **Часто критерием эффективности служит равенство APR в рассматриваемых вариантах.**

задача нахождения процентной ставки эквивалентной данной возникает при сравнении различных условий одного контракта

Применение APR

(доходность вкладов и кредитов)

- доходность
месячных
вкладов под
30% годовых

$$\left(\left(1 + \frac{0,3}{12} \right)^{12} - 1 \right) \times 100\%$$
$$= 34,48\%$$

Применение APR

(эквивалентность процентных ставок)

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{0,8}{12}\right)^3 &= \\ &= \left(1 + \frac{X}{4}\right) \\ X\% &= 85,45\% \end{aligned}$$

- Одинаковая доходность по трехмесячным и одномесячным кредитам при заданной ставке годовых (80%) рассчитывается исходя из решения следующего уравнения:

Применение APR: доходность векселей

Доходность банковских кредитов и депозитов растет при сокращении периода капитализации, а доходность дисконтных векселей сокращается.

$$X = \frac{100}{100 - 14,8} - 1 =$$
$$= 0,1737$$
$$X\% = 17,37\%$$

- Срок погашения векселей осенью 2003 г.: и процентного, и дисконтного, составлял 1 год. Дисконтный вексель продается по ставке 14,8% годовых.
- Рассчитаем эквивалентную процентную ставку процентного векселя (X%).

Применение APR: доходность векселей Доходность банковских кредитов и депозитов растет при сокращении периода капитализации, а доходность дисконтных векселей сокращается.

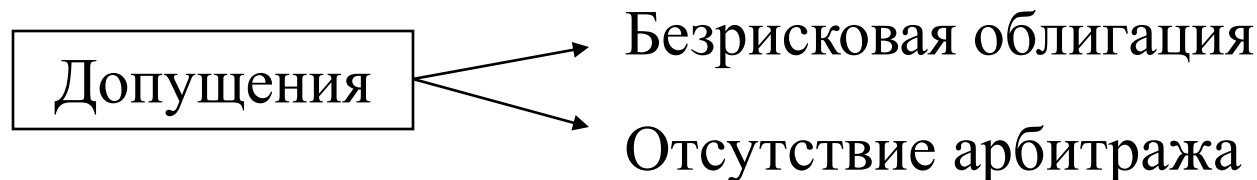
$$X = \left(\frac{100}{100 - 14,8 : 2} \right)^2 - 1 =$$

$$= 0,1662$$

$$X\% = 16,62\%$$

- Срок погашения векселей составлял 0,5 года.
Дисконтный вексель продается по ставке 14,8% годовых.
- Найдем доходность этого векселя (X)
- Рассчитаем эквивалентную процентную ставку процентного векселя (Y%).

Пример. Модели оценки облигации



$$P = \sum_{i=1}^N \frac{C_i}{(1+r_i)^i} + \frac{par}{(1+r_N)^N}$$

P – подлинная стоимость облигации

C_i – купон $i_{го}$ периода;

N – количество периодов до выплаты номинала

par – номинальная стоимость облигации

r – доходность, требуемая инвесторами

При отсутствии арбитража полученная подлинная стоимость облигации должна наблюдаться на рынке капитала

Принятие инвестиционного решения на основе доходности к погашению

P_m – приведенная стоимость; par – номинальная стоимость; C_i – ежегодные купонные выплаты; YTM – доходность к погашению

- Ежегодные купонные выплаты Возможные случаи:
$$P_m = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{(1 + YTM)^i} + \frac{par}{(1 + YTM)^n}$$
 $YTM > C_i \Rightarrow P_m > par$
 $YTM < C_i \Rightarrow P_m < par$
- Полугодовые купонные выплаты $YTM = C_i \Rightarrow P_m = par$
$$P_m = \sum_{i=1}^{2n} \frac{C_i / 2}{(1 + YTM / 2)^i} + \frac{par}{(1 + YTM / 2)^{2n}}$$

Правило принятия решения: *подсчитайте доходность к погашению и сравните ее с требуемой ставкой доходности (r), если r меньше или равен рассчитанной доходности $\Rightarrow$ покупайте облигацию*

Способы анализа доходности

Текущая доходность $CY = \frac{C_i}{P_m}$

Обещанная доходность к погашению $APY = \frac{C_i + \left\{ \frac{par - P_m}{n} \right\}}{(par + P_m)/2}$

Досрочная доходность к погашению $ARY = \frac{C_i + \left\{ \frac{P_f - P_m}{hp} \right\}}{(P_f + P_m)/2}$

Доходность к отзыву $AYC = \frac{C_i + \left\{ \frac{P_c - P_m}{nc} \right\}}{(P_c + P_m)/2}$

C_i – купонная выплата; P_m – текущая рыночная цена; n – срок погашения; par – номинал
 hp – срок до момента ранней продажи; P_f – цена облигации в момент ранней продажи
 nc – срок до потенциального отзыва; P_c – цена отзыва

Ипотека: определение и общие понятия

Ипотечное кредитование — долгосрочная ссуда, предоставляемая юридическому или физическому лицу банками под залог недвижимости: земли, производственных и жилых зданий, помещений, сооружений. Самый распространенный вариант использования ипотеки в России - это покупка физическим лицом квартиры в кредит. Закладывается при этом, как правило, вновь покупаемое жилье, хотя можно заложить и уже имеющуюся в собственности квартиру.

Виды ипотеки по типу покупаемого жилья: первичное и вторичное. Последнее имеет большее распространение ввиду немедленного наличия предмета залога.

Имеются **дополнительные расходы потребителя**, связанные с ипотечным договором, например:

- Комиссия риэлтору
- Страхование жизни, здоровья и квартиры
- Оценка имущества

Пример использования финансовой математики

Ипотека: схемы (финансовые модели)

1. **Аннуитетная схема:** равными долями. При этом типе расчетов вы платите каждый месяц одинаковую сумму. Математически это должно означать, что приведенная стоимость суммы платежей на дату выдачи кредита при ставке дисконтирования равной процентной ставке равна сумме кредита.
2. **Дифференцированная схема:** понижающийся, или «от остатка». При дифференцированных платежах вся сумма основного долга делится на равные части и ежемесячно выплачивается эта часть плюс проценты, начисленные на остаток основного долга.
3. **Метод прямой оплаты (Казань):** каждый месяц выкупается X кв.м по цене, включающей набежавшие проценты (естественно сложные, скорее всего с ежемесячной капитализацией). Схема, кажется, имеет сингапурских или немецких родителей из «социальной рыночной экономики».

Типовыми являются Дифференцированная и Аннуитетная схемы.

Все схемы актуарные. Разницы в APR между ними практически нет, но в остальном... Массовой в России стала аннуитетная схема – она выгоднее банкам (почему?).

Аннуитетная схема

Недостатки аннуитетного платежа:

1. Формула расчета аннуитетного платежа такова, что общая сумма выплат по процентам при аннуитетном платеже будет выше, чем при дифференцированном. Правда не столь значительно.
 2. «Равными долями», но это отнюдь не означает, что выплаты равномерно погашают сумму основного долга. В первые месяцы и годы вы платите почти только проценты, а тело долга остается почти нетронутым.
- Представим такую ситуацию. Два заемщика взяли кредит на одинаковый срок, но погашают кредит разными схемами. По прошествии половины этого времени решили погасить кредит досрочно. С обоих заемщиков банки уже получили по три четверти процентных платежей, но первому придется вернуть своему банку половину основного долга, а второму — три четверти.
 - Иная ситуация. Оба заемщика на середине срока объявили дефолт. Тот, который брал кредит на условиях дифференцированного платежа, отдал банку в целом на 15—18% больше, чем тот, который выплачивал по аннуитету. Однако он все же покрыл половину основного долга и, потеряв заложенную квартиру, вправе рассчитывать на другое жилье.

ОАО “Газпромбанк” пример аннуитетной схемы:

Кредит предоставляется сроком на 10 лет

- Общая сумма кредита составляет 6 000 000 рублей
- Процентная ставка 12,7% годовых
- Срок ипотеки с 17.04.2012 по 14.04.2022 года

Формула для расчета процентов

Остаток основного долга * (дата осуществляемого платежа — дата предыдущего платежа)*процентная ставка/365)

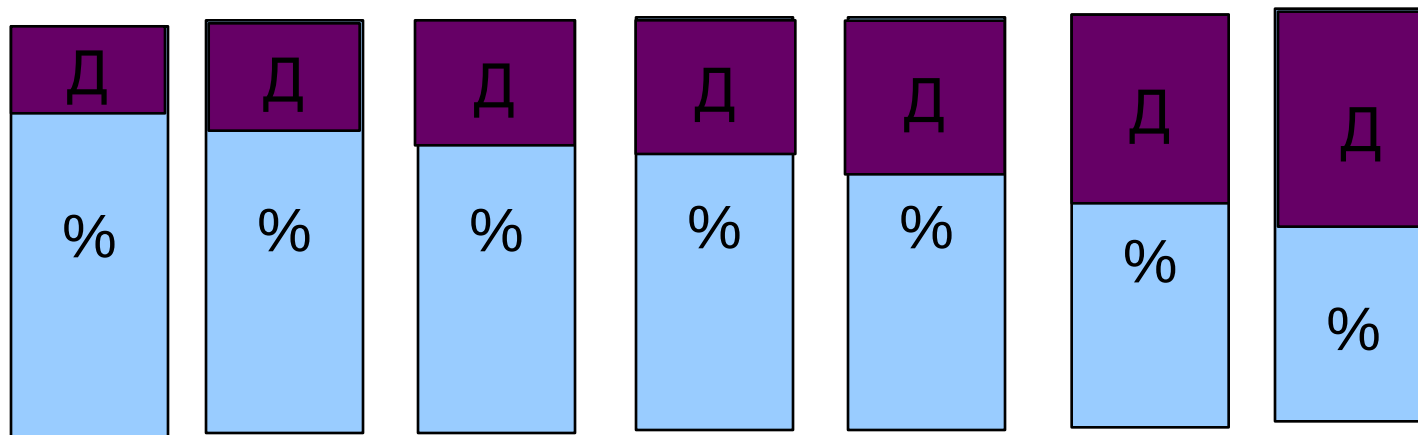
Погашение основной суммы :

сумма ежемесячного платежа — уплачиваемые проценты

Недостатки аннуитетной схемы:

ОАО “Газпромбанк” (пример)

при аннуитетной схеме: погашение основного долга и уплата процентов производится аннуитетными платежами в размере **88537,90 руб.** при этом в первую очередь погашаются проценты (%), начисленные за фактическое количество дней пользования кредитом в соответствующем процентном периоде, оставшиеся средства направляются в погашение основного долга (Д)



Дифференцированная схема

Недостатки дифференцированного платежа:

1. Большую часть процентов заемщику приходится платить в первую половину срока, когда на эти деньги можно купить больше, чем через 5, 10 или 20 лет в силу инфляции.
2. Кредит с дифференцированным платежом труднее получить, ведь банк оценивает максимальную сумму кредита исходя из способности клиента «потянуть» первые платежи.

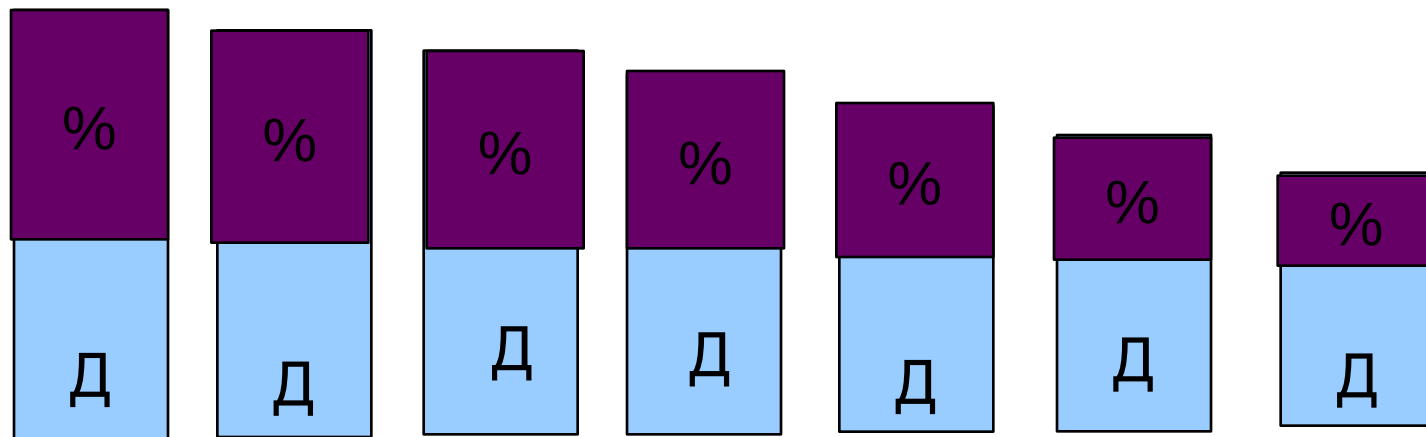
Достоинства дифференцированного платежа:

1. Благодаря «совместным усилиям» падающих процентов и инфляции (а у многих людей со временем еще и повышаются доходы) выплаты по кредиту становятся все менее обременительными, и к концу срока фактически снижаются в десятков раз.
2. Более того, это плюс и при реструктуризации задолженности. Поскольку погашено основной суммы будет существенно больше, чем при аннуитетной схеме.

ОАО “Газпромбанк” пример аннуитетной схемы:

при дифференциальной схеме: сумма ежемесячного платежа состоит из платежа погашения основного долга в размере **50 000 руб.** плюс проценты, начисленные за фактическое количество дней пользования кредитом в соответствующем процентном периоде:

Остаток основного долга * (дата осуществляемого платежа — дата предыдущего платежа) * процентную ставку/365)



ОАО “Газпромбанк” пример

Платежи, тыс. руб.	Аннуитетная схема	Дифференциаль- ная схема
Получение кредита в банке	+ 6 000	+ 6 000
Первоначальный взнос (условие Газпромбанка)	+ 2 000	+ 2 000
Комиссия риэлтору	- 14	- 14
Страхование жизни, здоровья и квартиры	- 318,7	- 277,8
Оценка имущества	- 60	- 60
Суммарные платежи по кредиту:	- 10 948,08	- 10 127,35
- платежи за пользование кредитом	- 4 623, 35	- 3 841,75
эффективная ставка процента, APR	14,74%	14,85%

Реструктуризация кредита:

Досрочное погашение

- У заемщика через **4 года** оказалась достаточная сумма для погашения всего кредита, и он полностью погашает задолженность перед банком.
- В «Газпромбанке» для такого развития событий организованы благоприятные условия. За 3 дня до внесения средств требуется написать соответствующее заявление и после его рассмотрения и перечисления денежных средств на счет кредит считается погашенным, без каких либо других переплат.
- **Сумма погашения** являет собой **остаток по основному долгу**.
- **Аннуитетная схема:** При погашении всего кредита через 4 года при аннуитетной модели расчетов сумма необходимая к уплате на **835 493,30 р.** будет больше чем при дифференциальной.
- Всего за 4 года заемщик при аннуитетном методе расчетов выплатит банку **8 839 530,38 р.**, при дифференциальном методе расчетов **8 624 481,97р.**
- В том и другом случае досрочное погашение кредита выгодно.
- Дифференциальная схема в данном случае является более выгодной для заемщика.

Весь кредит стоит **(вопрос: достаточен ли APR для оценки цены кредита?)**

- при аннуитетном методе **APR = 14,70%**
- при дифференциальном методе **APR = 14,98%**

Реструктуризация кредита:

снижение суммы ежемесячного платежа

- Через 3 года заемщик не может больше выплачивать ежемесячные платежи в том же размере (предположим что его уволили с работы и он устроился на менее оплачиваемую или др. случай).
- Банк продлевает срок погашения кредита на 13 лет, таким образом заемщик имеет 20 лет, что бы погасить кредит.

При аннуитетном методе расчета:

- платежи первоначально составляли **88 527,90** р. , а стали **57 046,15** р.
- В общей сложности за 23 года пользованием кредита заемщик выплатит **16 978 467,82** руб., из них **10 878 078,14 руб.** только проценты банку.
- **APR составит 14,03 %.**

При дифференцированном методе расчетов, мы видим похожую и очень тяжелую, но на этот раз **немного более выгодную для заемщика** картину:

- Вся сумма, которую он заплатит будет составлять **13 875 110 р.** и за пользование кредитом он заплатит **7 308 850** р., что на **3 565 228,14р.** меньше чем при аннуитетной схеме.
- **APR составляет 14,63%.**

Типовой отчет по Ипотеке

- кредит предоставляется на приобретение квартиры общей стоимостью 2 848 860,00 руб. с условием оплаты первоначального взноса на сумму 298 860,00 руб. т.е. 10% от стоимости приобретаемой квартиры;
- кредит предоставляется в сумме 2 550 000,00 руб.;
- срок ипотеки с 30.07.2008 по 12.07.2027 года;
- *при аннуитетной схеме*: погашение основного долга и уплата процентов производится аннуитетными платежами в размере 30215,00 руб. при этом в первую очередь погашаются проценты, начисленные за фактическое количество дней пользования кредитом в соответствующем процентном периоде, оставшиеся средства направляются в погашение основного долга;
- *при дифференциальной схеме*: сумма ежемесячного платежа состоит из платежа погашения основного долга в размере 11 184,21 руб. плюс проценты, начисленные за фактическое количество дней пользования кредитом в соответствующем процентном периоде;
- процентная ставка за пользование кредитом устанавливается 13.0% годовых после оформления документов на право собственности квартиры процентная ставка не изменяется.

ОСНОВНЫЕ УСЛОВИЯ	
Сумма кредита	2 550 000
Валюта кредита	Рубли РФ
Процентная ставка (% годовых)	13,00%
Срок пользования кредитом	228
Дата выдачи кредита	30.07.2008
Аннуитетный платеж	30215

Типовой отчет по Аннуитетной Ипотеке

Дополнительные расходы

Дополнительные расходы потребителя и иные платежи	Расчет начислений	Всего
1. Оплата одноразовой комиссии за выдачу кредита	1500	1 500,00р.
2. Комиссия риэлтору (при регистрации договора и получении прав собственности)	(8000+10000)	18 000,00р.
3. Страхование жизни, здоровья и квартиры (ежегодный платеж из расчета 0,8% от суммы остатка основного долга по кредитному договору, увеличенной на 10%)	(сумма остатков основного долга×1,1×0,008)	285 866,89р.
4. Оценка имущества (ежегодный платеж)	(3800×19)	72 200,00р.
Итого		377 566,89р.

Типовой отчет по Аннуитетной Ипотеке

Платежи: Первый год

ГРАФИК ПЛАТЕЖЕЙ, В СООТВЕТСТВИИ С КОТОРЫМ ПРОИЗВОДИТСЯ РАСЧЕТ ПОЛНОЙ
СТОИМОСТИ КРЕДИТА
(АННУИТЕТНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА)

Дата платежа	Платеж за расчетный период, рублей РФ				Остаток задолженно сти по ссуде, рублей РФ
	Сумма платежа	в том числе			
		проценты	погашение основной суммы ссуды	дополнительн ые расходы потребителя и иные платежи	
1	2	3	4	5	6
30.07.2008	-2514260,00	0,00	-2 550 000,00	35 740,00	2 550 000,00
12.08.2008	30215,00	905,74	29 309,26	0,00	2 520 690,74
12.09.2008	30215,00	27755,15	2 459,85	0,00	2 518 230,88
13.10.2008	30215,00	26833,61	3 381,39	0,00	2 514 849,49
12.11.2008	30215,00	27690,83	2 524,17	0,00	2 512 325,32
12.12.2008	30215,00	26770,68	3 444,32	0,00	2 508 881,00
12.01.2009	30215,00	27700,80	2 514,20	0,00	2 506 366,80
12.02.2009	30215,00	27673,04	2 541,96	0,00	2 503 824,83
12.03.2009	30215,00	24969,65	5 245,35	0,00	2 498 579,48
13.04.2009	30215,00	27587,06	2 627,94	0,00	2 495 951,54
12.05.2009	30215,00	26669,07	3 545,93	0,00	2 492 405,61
15.06.2009	30215,00	27518,89	2 696,11	0,00	2 489 709,50

Платежи: Последний год

ВсД = 1,175%

APR = 15,05%

Типовой отчет по Дифференцированной Ипотеке

Дополнительные расходы

Дополнительные расходы потребителя и иные платежи	Расчет начислений	Всего
1. Оплата одноразовой комиссии за выдачу кредита	1500	1 500,00р.
2. Комиссия риэлтору (при регистрации договора и получении прав собственности)	(8000+10000)	18 000,00р.
3. Страхование жизни, здоровья и квартиры (ежегодный платеж из расчета 0,8% от суммы основного долга по кредитному договору, увеличенной на 10%)	(сумма основного долга×1,1×0,008)	224 400,00р.
4. Оценка имущества (ежегодный платеж)	(3800×19)	72 200,00р.
Итого		316 100,00р.

Типовой отчет по Дифференцированной Ипотеке

Платежи: Первый год

ГРАФИК ПЛАТЕЖЕЙ, В СООТВЕТСТВИИ С КОТОРЫМ ПРОИЗВОДИТСЯ РАСЧЕТ ПОЛНОЙ СТОИМОСТИ КРЕДИТА (ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА)					
Дата платежа	Платеж за расчетный период, рублей РФ				Остаток задолженност и по ссуде, рублей РФ
	Сумма платежа	в том числе			
		проценты	погашение основной суммы ссуды	дополнительны е расходы потребителя и иные платежи	
1	2	3	4	5	6
30.07.2008	-2514260,00	0,00	-2 550 000,00	35 740,00	2 550 000,00
12.08.2008	12089,95	905,74	11 184,21	0,00	2 538 815,79
12.09.2008	39138,93	27954,72	11 184,21	0,00	2 527 631,58
13.10.2008	38117,99	26933,78	11 184,21	0,00	2 516 447,37
12.11.2008	38892,63	27708,42	11 184,21	0,00	2 505 263,16
12.12.2008	37879,64	26695,43	11 184,21	0,00	2 494 078,95
12.01.2009	38721,58	27537,36	11 184,21	0,00	2 482 894,74
12.02.2009	38598,09	27413,88	11 184,21	0,00	2 471 710,53
12.03.2009	35833,60	24649,39	11 184,21	0,00	2 460 526,32
13.04.2009	38351,12	27166,91	11 184,21	0,00	2 449 342,11
12.05.2009	37355,26	26171,05	11 184,21	0,00	2 438 157,89
15.06.2009	38104,15	26919,94	11 184,21	0,00	2 426 973,68

