

ОСНОВЫ финансовой математики (Лекции 1 и 2)

"Сложное сделать простым,
простое сделать привычным,
привычное сделать приятным."
(К.С. Станиславский)

Лектор:

Мицкевич Андрей Алексеевич

amitskevitch@mail.ru

к.э.н., доцент ВШФМ РАНХиГС и НИУ ВШЭ

Минимум ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

Лекции 1 и 2:

1. Процент.
2. Инфляция. Номинальная и реальная ставка процента.
3. Индексация и вычисления в валюте.
4. Экономическая прибыль

Последующие лекции:

1. Дисконтирование.
2. Рента и рентная цена.
3. Доходность. Эффективная ставка процента.
4. Сравнение условий кредитов. Потребительский кредит. Ипотека.
5. Банковские «дела».

Часть 2. Примеры расчета и анализ критериев выбора инвестиционного проекта.

НАША Цель - научиться считать длинные деньги

Цитаты в копилку

- «Процент неграмотных – величина постоянная, только в наше время неграмотные умеют читать». (Альберто Моравиа)
-
- «Если бы получить кредит в банке было так просто, как утверждает реклама, никто бы не грабил банки». (Американское изречение)

Литература

Основная

1. Четыркин Е.М. Финансовая математика: Учебник. – 2-ое изд., испр., -М.: Дело, 2005, 2008. (выдается в электронном виде)
2. Бухвалов А.В., Бухвалова В.В. Финансовые вычисления для менеджеров: учеб. пособие. 3-е изд., Высшая школа менеджмента СПбГУ. – СПб.: Изд-во «Высшая школа менеджмента». 2010.
3. Мицкевич А.А. Финансовая математика. – М.: ОЛМА-пресс, ИНЭС, 2003. (краткий вариант выдается в электронном виде)

Дополнительная

1. Криничанский К.В. *Математика финансового менеджмента* – М: Дело и сервис, 2006.
2. Ковалев В. В., Уланов В.А. *Курс финансовых вычислений* – М: Финансы и статистика, 2002.
3. Кочович Е. *Финансовая математика с задачами и решениями.* – М: Финансы и статистика, 2004.
4. Мелкумов Я.С. *Финансовые вычисления. Теория и практика.* – М:Инфра-М, 2007 и др.

+ Мицкевич А.А. Раздаточный материал.

Финансовая математика

Финансовая математика – это система практически необходимых расчетов доходности финансовых, инвестиционных и торговых операций во времени с учетом инфляции, валютных курсов, а также юридических и фактических условий выполнения договоров. Она исследует параметры и результаты коммерческих и финансовых операций, обращая особое внимание на обыкновения, сложившиеся в мире бизнеса.

- **ФинМат** исследует параметры коммерческих и финансовых операций и оценивает их финансовые результаты.
- **ФинМат** охватывает довольно узкий круг методов, в которых возникает необходимость, когда в условиях сделки оговариваются три момента:
 1. Стоимостные характеристики: цены, размеры платежей и долговые обязательства.
 2. Временные характеристики: сроки платежей, даты и продолжительности периодов, отсрочки и т.д.
 3. Процентные ставки, заданные как в явной, так и в неявной форме.

Математика: Проценты в графиках

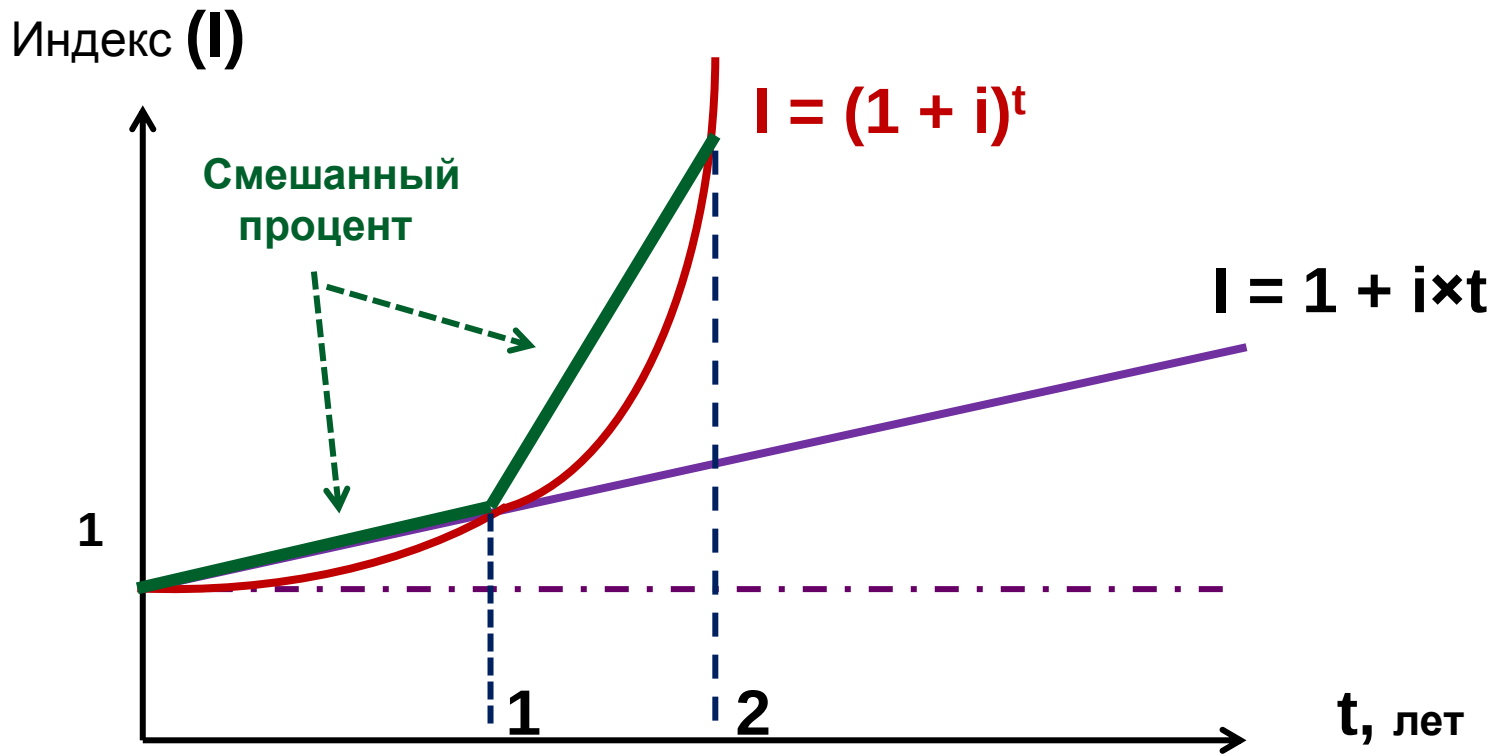


Рис. 1. Математические зависимости для индексов

- простого процента: $I = 1 + i \times t$
- сложного процента: $I = (1 + i)^t$,

где t – срок, выраженный в годах, а i – процент годовых, заданный в долях.

- **Смешанный процент** начисляется при дробном числе лет (точнее периодов начисления процентов) по формуле: $(1 + i)^{[t]} \times (1 + (t - [t]) \times i)$.

где $[t]$ - число полных лет, $(t - [t])$ - это оставшаяся доля последнего года.

Математика:

Простые проценты: $I = 1 + it$

Сложные проценты: $I = (1 + i)^t$

Финансы: Точный простой процент с точным числом дней

$$P = S \times \left(1 + \frac{k \times i}{365}\right)$$

- В российских банках и кредитных организациях с 1998 года используют точный процент с базой в 365 или 366 дней. При этом и число дней в месяце нужно указывать точно.
- Точные проценты с точным числом дней обозначаются как **(к,365)** или **(АСТ, АСТ)**. ⁷

Число дней

- Теперь научимся определять число дней кредита или депозита (n) по календарю. В российской практике обычно первый и последний день принимается за один день. ПРИЧИНА: Процент виртуально начисляется ежедневно в момент открытия отделения банка. Такова наша и «всемирная» инструкция.
- Например, для месячного депозита срок возврата наступает на 31-й день со дня, когда деньги положены в банк. Как можно заметить в этом случае действует правило (30,360).
- Если взята ссуда на период с 13 июля по 19 сентября, то число дней ссуды вычисляется так:
 - в июле - 18 дней $(31 - 13 = 18)$
 - плюс в августе - 31 день
 - плюс в сентябре - 19 дней
 - **Итого 68 дней**
- Если взята 29 января 2022 г. ссуда на один месяц, то отдавать ее придется на 31-й день, то есть 1 марта.

Финансы: Обыкновенный или коммерческий простой процент

$$P = S \times \left(1 + \frac{n \times i}{360}\right)$$

где n – число дней, кратное «банковскому» месяцу:

$n = 30, 60, 90, \dots 360$.

- По вкладам и кредитам **в основном частных лиц** на короткий срок, **обычно до года**, банки обычно начисляли простой процент по формуле **обыкновенного или коммерческого процента**

Удивительные Финансы:

Обыкновенные проценты с точным числом дней

$$P = S \times \left(1 + \frac{k \times i}{360}\right)$$

- В этом случае применяют базу равную 360 дням, но указывают точное число дней кредита. Обозначается этот способ начисления простых процентов как (к,360) или (АСТ,360). Данный метод распространен во Франции, Бельгии, Испании, Швейцарии, Югославии. База формируется исходя из 30-и дней в банковском месяце, но при этом учитывается точное число дней в периоде кредитования.

Финансы: Плавающие простые проценты

$$P = S \times \left(1 + \frac{k_1 \times i_1}{365} + \frac{k_2 \times i_2}{365} + \dots\right)$$

- В условиях нестабильной экономической конъюнктуры процентные ставки часто меняются. Такие процентные ставки называют *плавающими*.
- Ст. 838 ГК позволяет банку изменять размер процентов, выплачиваемых на вклады до востребования, если иное не предусмотрено договором вклада.

Математика: Сложные проценты

- **Сложные проценты**
- это плата за пользование ссудой, рассчитываемая исходя из величины долга, в которую включается сумма процента начисленного ранее.

$$P = S \times (1 + i)^t$$

Иллюстрация мощи сложного процента

Сложный процент дает приращение вклада в геометрической прогрессии, а простой процент - в арифметической. При больших сроках разница может быть впечатляющей.

Классический пример с "покупкой" острова Манхэттен, где сейчас расположен центр Нью-Йорка, у индейского вождя за 24 доллара в 1624 году. Если бы эти деньги удалось положить в банк всего под 6,3% годовых (средний процент по долгосрочным займам в XX веке в США), то спустя 376 лет, в 2000 году,

- **Формулу напишите самостоятельно**

была бы накоплена сумма примерно 227 362 430 000 долл.

Кстати, при простом проценте накопленная сумма была бы ничтожной: $24 \cdot (1 + 0,063 \cdot 376) = 592,52$ долл.

Математика: Начисление сложных процентов несколько раз в году

- Год разбивается на m равных процентных периодов
- j_m – номинальная процентная ставка (годовая)

$$S_t = P \left(1 + \frac{j_m}{m} \right)^{mt}$$

- формула наращения

$$P = S_t \left(1 + \frac{j_m}{m} \right)^{-mt}$$

- формула дисконтирования

$$j_m = m \left[\left(\frac{S_t}{P} \right)^{\frac{1}{mt}} - 1 \right]$$

- номинальная процентная ставка

Математика: Непрерывное начисление процентов

$$e = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m$$

- константа Л.Эйлера
 $e=2,718281828459045\dots$

$$\delta$$

- процентная ставка (сила роста)

$$S_t = P \cdot e^{\delta t}$$

- формула наращения

$$P = S_t e^{-\delta t}$$

- формула дисконтирования

$$\delta = \frac{1}{t} \ln \frac{S_t}{P}$$

- сила роста

Природа и происхождение сложного процента

- Почему же в расчетах применяются не только простые, но и сложные проценты? Это придумали хитрые банкиры, чтобы обманывать простых людей? Нет - это отражение объективной реальности. Поясним, как люди пришли к сложным процентам на примере.
- Предположим, что два клиента поместили каждый по 1000 руб. в банк под 200% годовых на бессрочный депозит. Депозитов с такими условиями нет и не было. Сейчас вы разберетесь почему. "Ленивый" клиент добросовестно продержал деньги целый год на счете в банке и в результате получил 3000 руб. "Активный" клиент пришел в банк через полгода, взял причитающиеся к этому моменту 2000 руб. со счета и тут же положил их снова. За вторую половину года эта сумма удвоилась и в итоге он через год имеет уже 4000 рублей. Заметьте, что банкиру это невыгодно не только потому, что приходится платить больше, но и потому что нужно изымать капитал из обращения. К тому же "сверхактивный" клиент догадается приходить и раз в квартал:
- **Формулу напишите самостоятельно** $= 5062,5$ руб.
- и даже чаще, хоть каждый день:
- **Формулу напишите самостоятельно** $= 7388,6$ руб.
- Ежедневное или чаще начисление процентов называется *непрерывным* и приближенно, с хорошей степенью точности, вычисляется с помощью числа $e = 2,7182818...$. Дело в том, что
- **Формулу напишите самостоятельно** $= e^a$
- Таким образом, при непрерывном начислении процентов доход на вложенный капитал составит почти $738\% - 100\% = 638\%$ годовых.

Происхождение сложного процента и срочного вклада

- Сложный процент восстанавливает справедливость, он уравнивает "ленивого" и "активного" клиентов. Переоформление вклада ничего не приносит банкиру, кроме хлопот, поэтому он сам должен начислять сложный процент.
- Во избежание процедуры изъятия и повторного вклада обе стороны кредитной или депозитной сделки заранее договариваются об использовании **сложных процентов и срочных вкладов «в одном флаконе»**.
- В стабильных экономических условиях при многолетнем сроке кредита применение сложного процента является неписаным стандартом. Но год – это большой срок. Поэтому многие российские и иностранные банки начисление сложных процентов по кварталам, а в условиях высокой инфляции и по месяцам.

В кредитных договорах и банковских правилах это звучит примерно так:

- *"Ежеквартально сумма вклада увеличивается на ... процентов"* или
- *"Проценты по вкладу капитализируются каждые три месяца"* или
- *"Сумма процентов по вкладу прибавляется к основному вкладу раз в три месяца"*.

Математика: Плавающие сложные проценты

$$P = S \times (1 + i_1)^{t_1} \\ \times (1 + i_2)^{t_2} \times \dots$$

- Сложные проценты непосредственно малоприспособлены для бытовых операций. Поэтому в деловых операциях используется смешанный процент.

Финансы: Смешанные проценты

$$P = S \times (1 + 0,2)^2 \times \left(1 + \frac{0,2 \times 7}{12}\right) = 1,34 * S$$

- **Смешанный процент** - это практическая форма сосуществования простого и сложного процентов.
- Кратное число периодов капитализации представлено индексом, вычисленным по сложному проценту, а остаток представлен индексом, вычисленным по простому проценту

Право: Действие смешанного процента в РФ

- Ст. 809 ГК: по умолчанию, то есть при отсутствии в договоре условия о размере процента, этот размер определяется так:

Ставка:

- **существующей ставкой банковского процента в месте жительства физического лица**
- **или ставкой рефинансирования ЦБР для юридического лица.**

Капитализация:

- При отсутствии иного соглашения проценты выплачиваются **ежемесячно** до дня возврата суммы займа.

ПРИМЕР: Допустим, что долг был просрочен на 4 месяца (30, 31, 31, 30 дней с первого по первое число), ставка рефинансирования была 12% и стала с 13-ого дня третьего месяца равной 14%. Найти индекс роста долга за этот период.

$$\left(1 + \frac{30}{365} 12\%\right) \left(1 + \frac{31}{365} 12\%\right) \left(1 + \frac{12}{365} 12\% + \frac{19}{365} 14\%\right) \left(1 + \frac{30}{365} 14\%\right) \approx 1,044$$

Финансы: Понятие процентного пункта

Различают процентный пункт и процент.

- Пусть некая величина составляет 30%. Если говорят, что она увеличилась на 5 процентных пунктов или просто на 5 пунктов, то это означает, что она стала равной 35%.
- Если же подчеркивают процентный рост величины, то при прочих равных условиях пятипроцентный рост означает увеличение доли данной величины лишь до
$$30\% \times 1,05 = 31,5\%.$$

Пример: LIBOR + 0,1% (РЖД перед кризисом так «разместился»).

Учет векселей

Вексель – это безусловное долговое обязательство

$$P = S \times \left(1 - \frac{k \times d}{365}\right)$$

где

k - число дней до погашения
векселя,

d - ставка дисконта в долях.

$$\text{Доходность векселя} = \frac{1}{\left(1 - \frac{k \times d}{365}\right)^{\frac{365}{k}}}$$

Схема классического вексельного обращения



Экономика: Инфляция

- В условиях инфляции деньги дешевеют, так как цены на товары растут.
Противоположный процесс роста покупательной способности денег получил название *дефляции*.
- Например, темп инфляции, показывающий прирост уровня цен в процентах, равный 300% соответствует индексу роста цен равному 4,0.
 $Inf\% = 300\%$ это то же самое, что и $I_{цен} = 4$.
- Пятипроцентная дефляция, точнее темп дефляции, означающий уменьшение уровня цен на 5% соответствует индексу роста цен равному 0,95.

Динамика уровня инфляции в России

Год	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Inf, %	160,4	2508,8	840	215	131,6	21,8	11	84,4	36,5	20,2	18,6
Год	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	
Inf, %	15,1	12,0	11,7	10,9	9,0	11,9	13,3	8,1	8,8	6,1	

Экономика: Номинальные и реальные показатели

$$P(t) = \frac{H(t)}{I_{\text{цен}}(0, t)}$$

- **Для интереса:**

Сегодня в бизнесе часто используется концепция «зарабатываемой» индексации

- **Номинальными** называются показатели, рассчитанные в текущих ценах,
- а **реальными** - в сопоставимых ценах, часто называемых базовыми или ценами базового периода.

Пример: Чему равен доход 1500000 руб., полученный в конце 2010 года в ценах конца 2006 года?

$$\frac{1500000}{1,119 \times 1,133 \times 1,081 \times 1,088} = 1000000$$

Экономика: Производные показатели инфляции

$$\frac{1}{I_{\text{цен}}}$$

$$1 - \frac{1}{I_{\text{цен}}}$$

- Покупательная способность денег = сколько стоит рубль в старых ценах
- «Инфляционный налог» - это часть сбережений, сгорающих в огне инфляции.

Измерители инфляции

$$\text{Inf}\% \leftrightarrow \text{Inf}$$

$$I_p = 1 + \text{inf} \Leftrightarrow I_p \%$$

$\frac{1}{I_p}$ покупательная способность
денежной единицы

$1 - \frac{1}{I_p}$ «инфляционный налог»

Экономика: Номинальная и реальная ставки процента

$$1 + i_r = \frac{1 + i_n}{I_{\text{цен}}} = \frac{1 + i_n}{1 + \text{inf}}$$

$$i_r = \frac{i_n - \text{inf}}{1 + \text{inf}}$$

- Вывод формулы реальной ставки процента
- Реальная ставка процента

Финансы: Что выгоднее валютные или рублевые инструменты?

$$K_r = \frac{K_n}{I_{цен}}$$

$$Y_R = I_{\$} \times (1 + Y_{\$}) - 1$$

- Реальный и номинальный курс доллара в рублях
- Общая формула пересчета доходности в валюте ($Y_{\$}$, то есть доли прироста вклада в долларах) в рублевую доходность (Y_R , то есть доли прироста вклада в рублях), где $I_{\$}$ - индекс роста курса доллара.

Что выгоднее валютные или рублевые вклады?

- Рассмотрим этот вопрос на примере 2002 года. Допустим, что один и тот же банк привлекает рублевые и валютные вклады сроком на год под **28%** и под **5%**, соответственно. Как сравнить доходность этих двух альтернатив? Нам известен сегодняшний курс доллара (на май 2002 года он составлял примерно **31,2 руб. /долл.**), но мы достоверно не знаем ни будущей инфляции, ни прогноза роста курса доллара.
- Пренебрежем комиссиями обменных пунктов.
- Сравним два индекса роста:
- рублевого вклада **$I(R)=1,28$** и
- долларового вклада **$I(\$)=1,05 \cdot I_{\$}$** , где $I_{\$}$ - индекс роста курса доллара равный будущему курсу (обозначим за K), деленному на нынешний курс.
- Долларовый вклад выгоднее рублевого, если

$$I(\$) > I(R), \text{ то есть } 1,05 (K / 31,2) > 1,28.$$

Отсюда можно найти требуемый курс доллара через год. Он должен быть немного больше **38 руб./долл.**

- **Обратите внимание, что ваш вопрос был вам же и переадресован. Если вы верите в то, что курс доллара достигнет 38 руб./долл., то делайте долларовые вклады, в противном случае "ставьте на рубли". Один вопрос мы заменили другим, но гораздо более наглядным. Надеюсь, что такая замена вам поможет принять правильное решение.**

Прогноз курса доллара

- Единственная трудность, это прогноз курса доллара. При заключении сделки контрагенты могут по-разному его оценивать. Как найти компромисс? Можно, например, ориентироваться на крупные банки. Они имеют в своих штатах профессиональных дилеров валютного рынка, которые следят за динамикой курса доллара. Банки определяют свои ставки в валюте и в рублях, учитывая ожидаемый рост курса доллара. Поэтому можно использовать ту же формулу (16), но уже для нахождения ожидаемого курса доллара:

$$I_{\$} = \frac{Y_R + 1}{Y_{\$} + 1}$$

- где $I_{\$}$ - ожидаемый индекс роста курса доллара, $Y_{\$}$ и Y_R долларовая и рублевая доходности по аналогичным банковским вкладам, примерно с теми же сроками и условиями, что и в вашем будущем контракте. Только надо помнить, что сопоставимая рублевая доходность выше долларовой доходности. Это «экономико-психологический закон» российского денежного рынка.

Экономические затраты и прибыль

1. Затраты возникают при выборе решений.
2. Выбора без затрат не бывает и эти затраты называются *альтернативной стоимостью* или *альтернативными затратами*.
3. То, от чего мы отказались, - это наши потери, которые экономисты называют затратами.

- **Альтернативная стоимость** (*opportunity cost*) - это ценность лучшей из альтернатив, которыми мы жертвуем, делая выбор.

В отечественной литературе употребляются также термины "вмененные издержки" (хотя точнее этот термин относить к управленческому учету в качестве конкретного вида альтернативных затрат), "издержки упущенных возможностей", "альтернативные издержки", "цена выбора".

Экономические затраты = Бухгалтерские (внешние или явные) затраты + Неявные затраты

Внутренние затраты

Внутренние (неявные, скрытые) затраты - это затраты ресурсов, принадлежащих предпринимателю (фирме) и не внесенных в бухгалтерскую отчетность и тем самым не ставших явными, бухгалтерскими затратами.

Традиционные составляющие внутренних затрат:

- *затраты собственных материалов предпринимателя;*
- *затраты его капитальных ресурсов (зданий и оборудования);*
- *затраты принадлежащих ему финансовых ресурсов (например, нераспределенной прибыли);*
- *затраты на акционерный капитал или вложенные собственниками в некорпоративное предприятие средства;*
- *затраты труда, измеряемые возможной заработной платой собственника бизнеса (если самая выгодная альтернатива – это наемная работа в другом месте), или нормальная прибыль (в случае, если выгоднее продолжать самостоятельный бизнес в иной сфере);*
- *Вмененные затраты, равные недополученной прибыли, которую можно было получить от реализации вытесненной продукции из-за дефицита ресурсов*

Экономическая прибыль

Экономическая прибыль есть выручка за вычетом экономических затрат, то есть явных и неявных издержек.

- Она обладает неоспоримым преимуществом перед бухгалтерской прибылью. У нее есть точка отсчета, система координат. Если экономическая прибыль больше нуля, то соответствующая деятельность выгодна.
- Например, вы получили дивиденды в размере 20% годовых. Это может быть приемлемо, если банковский процент был равен 10%. Но это же самое при 25% по депозитам показывает экономические убытки в размере 5% при прочих затратах равных нулю.

Один из первых примеров использования
экономической прибыли:

«Управленческая добавленная стоимость»
(Пол Страссман, «Сони», 1989 г., млрд.долл.)

Выручка	9,5
Покупные изделия и услуги	Разделения на закупки и налоги не приведено
= Добавленная стоимость	
Налоги	
Добавленная бизнесом стоимость	1,0
<i>Добавленная акционерами стоимость</i>	- 0,5
Операционные затраты	- 0,3
Управленческие затраты	- 0,4
= <i>Управленческая добавленная стоимость</i>	- 0,2